

# 第三章 静电场边值问题的求解方法

场的分析方法回顾：直接积分法；  
高斯定理（+迭加原理）。

本章：在给定边界条件下求解泊松方程。

## 本章目录：

§ 3.1 唯一性定理

§ 3.2 镜像法

§ 3.3 解析函数法

§ 3.4 分离变量法

§ 3.5 格林函数法

# 边值问题

## 微分方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

## 边界条件

### 场域边界条件

### 介质交界处边界条件

### 自然边界条件

$$\varphi_1 = \varphi_2$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_{sf}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi = \text{有限值}$$

### 第一类边界条件

已知场域边界上各点电位值

$$\varphi|_S = f_1(s)$$

### 第二类边界条件

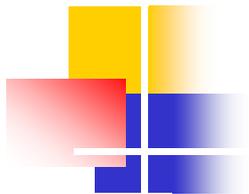
已知场域边界上各点电位的法向导数

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = f_2(s)$$

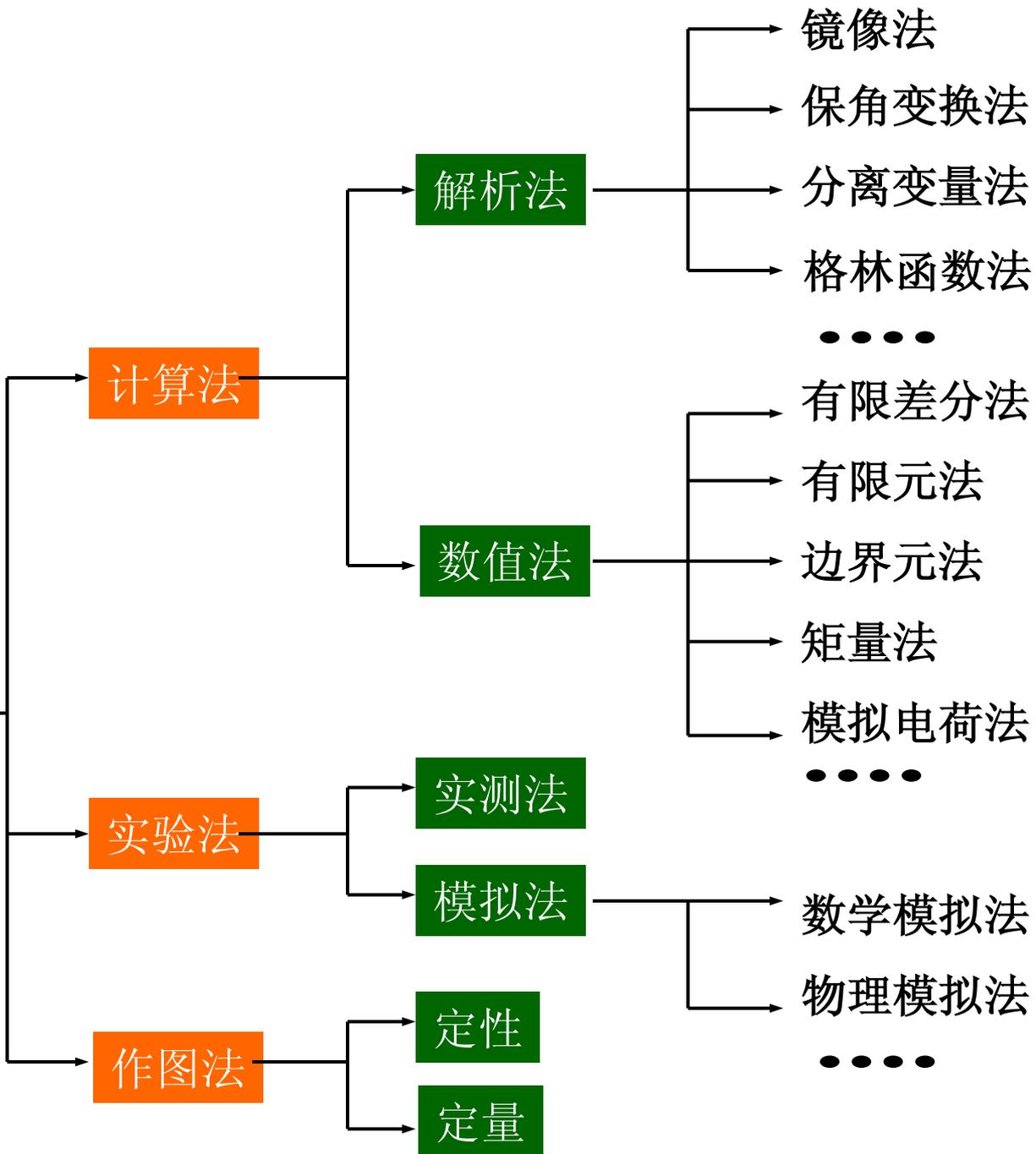
### 第三类边界条件

一、二类边界条件的线性组合，即

$$\left( \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_S = f_3(s)$$



边值问题  
研究方法

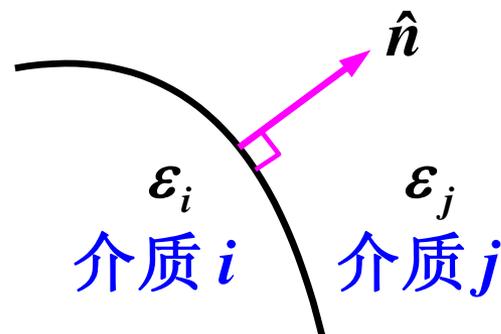


## § 3.1 唯一性定理

设自由电荷分布在有限区域，介质线性各向同性分区均匀。若

- ① 给定求解域内的自由电荷体密度和介质交界处的自由电荷面密度以及介质的介电常数；
- ② 给定求解区域边界上电位的值或其法向导数值（无限远处： $\varphi \sim r^{-1}$ ）
- ③ 在介质交界处满足：

$$\varphi_i = \varphi_j, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \rho_{sf}$$



则泊松方程的解唯一，最多相差一任意常数。如在（部分）边界上给定电位值，则解唯一。

## § 3.1 唯一性定理

【证】:  $\nabla^2 \varphi_i = -\rho_{fi} / \epsilon_i$

设有二组不同的解:  $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}$

令  $\varphi_i^* = \varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}$ ,

则  $\varphi_i^*$  满足齐次方程和齐次边界条件。

标量格林第一定理:

$$\int_V [\varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

令  $\varphi = \varphi^*, \psi = \epsilon \varphi^*$

$$\sum_i \int_{V_i} [(\varphi_i^* \epsilon_i \nabla^2 \varphi_i^* + \epsilon_i (\nabla \varphi_i^*) \cdot (\nabla \varphi_i^*))] dV = \sum_i \oint_S \epsilon_i \varphi_i^* \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n_i} dS$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_0 \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_0$

## § 3.1 唯一性定理

$$\varepsilon_i > 0 \Rightarrow |\nabla \varphi_i^*|^2 = 0 \Rightarrow \varphi_i^* = C_i = C$$

电位连续， $C$ 与 $i$ 无关。

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i^{(2)} + C$$

若在边界某处给定电位值，则  $C=0$

意义：

- 指出了解唯一的条件；
- 给求解方法提供了自由度（只需找到一个解满足方程及边界条件即可）。

• 可判断静电场问题的解的正确性：

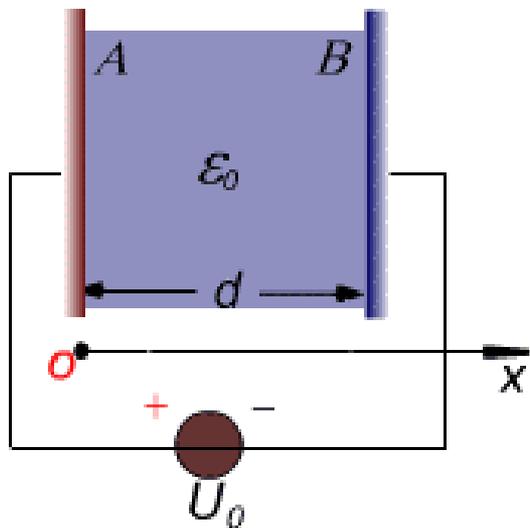
例 图示平板电容器的电位，哪一个解答正确？

$$A、\varphi_1 = \frac{U_0}{d} x^2$$

$$B、\varphi_2 = \frac{U_0}{d} x + U_0$$

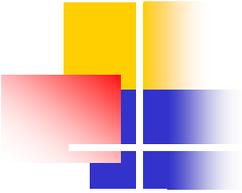
答案：（ C ）

$$C、\varphi_3 = -\frac{U_0}{d} x + U_0$$



平板电容器  
外加电源 $U_0$

• 唯一性定理为静电场问题的多种解法（试探解、数值解、解析解等）提供了思路及理论根据。



## § 3.2 镜像法

一种尝试方法。

数学基础： 唯一性定理。

物理基础： 等效思想。利用反问题或逆问题  
答案的不唯一性。

因果关系：

例： 等效电阻。

求解区域外包括边界上的电荷分布对求解区域内场的贡献：

例： 点电荷，球对称分布电荷。

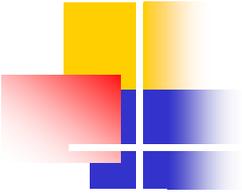
## § 3.2 镜像法

求解区域外包括边界上的电荷分布对求解区域内场的贡献可用场在求解区域边界上行为来代替或规定：

例：泊松方程的形式解

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} dS'\end{aligned}$$

例：边界条件，给定电位值或其法向导数值，对方程的通解进行选择。“滤波器”！



## § 3.2 镜像法

### 镜像法:

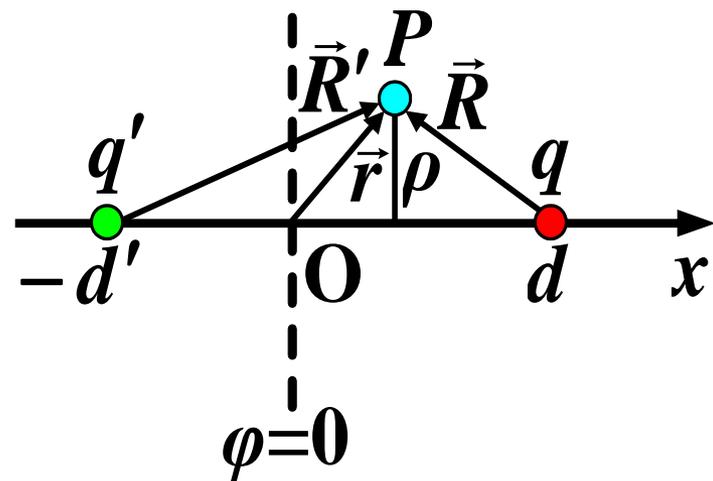
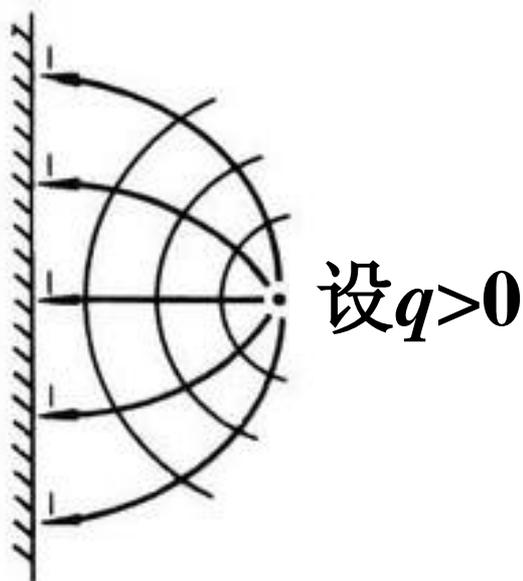
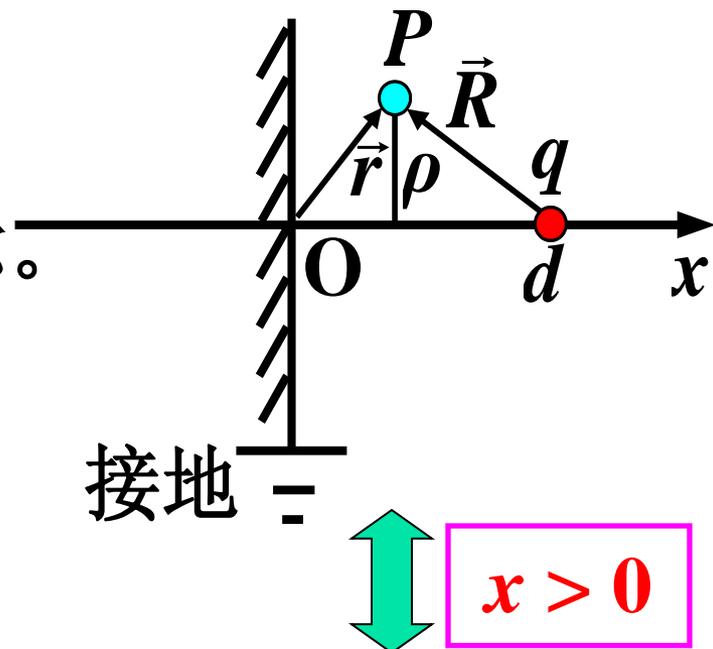
- ☑ 对求解区域内具有相同贡献或其产生的场与求解区域内电荷分布产生的场迭加能满足边界条件的求解区域外及边界上的电荷分布是不唯一的，有无数种可能的分布。
- ☑ 镜像法尝试从上述分布中寻找一种简单、便于计算的分布，替代原始问题中的实际分布。
- ☑ 上述做法是否可行？通过能否满足边界条件进行检验！

# § 3.2 镜像法

## 一、点电荷对无限大接地导体平面的镜像

$\varphi = \varphi(x, \rho)$ ,  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ , 轴对称。

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(x-d, \rho) \\ \varphi(0, \rho) = 0, \varphi|_{\infty} = 0 \end{cases}$$



## § 3.2 镜像法

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{[(x-d)^2 + \rho^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[(x+d')^2 + \rho^2]^{1/2}} \right\}$$

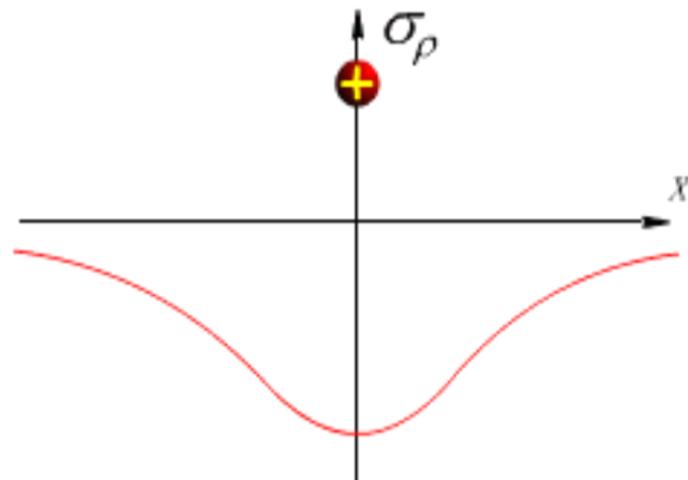
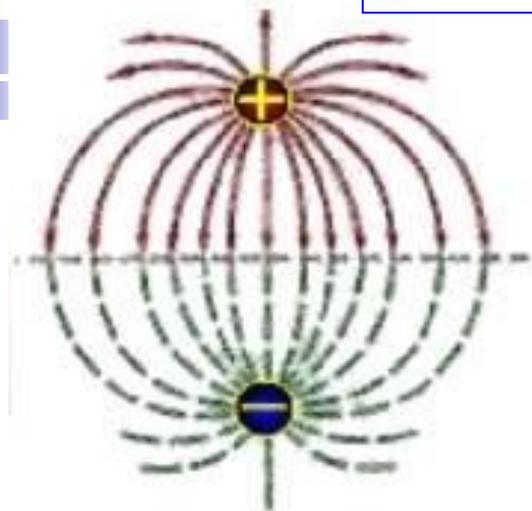
由  $\varphi(0, \rho) = 0 \rightarrow d' = d, q' = -q$   
(舍弃:  $d' = -d, q' = -q$ )

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + \rho^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + \rho^2]^{1/2}} \right\}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x-d}{[(x-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right\}$$

$$E_\rho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + \rho^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right\}$$

## § 3.2 镜像法



返回原问题，求感应电荷分布及总量：

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_x(0, \rho) = \frac{-qd}{2\pi(d^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$q_s = \int_S \rho_s \rho d\rho d\theta = -q$$

这说明点电荷（设  $q > 0$ ）发出的电力线除一根外全部终止在无限大导体平面上。电力线只能在电荷存在的地方或无限远处发出或终止。

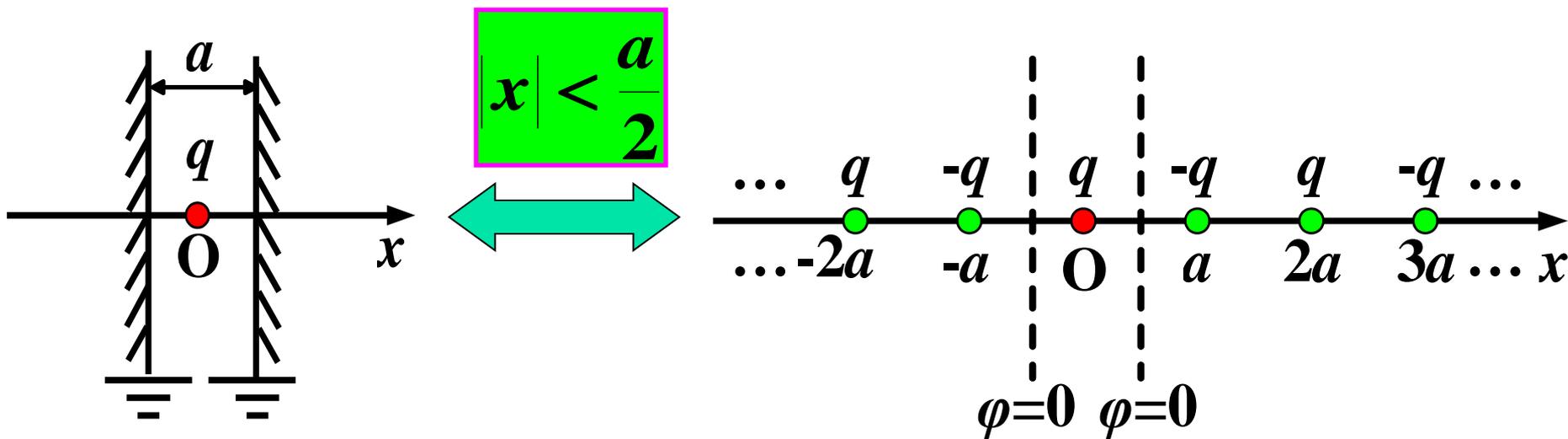
## § 3.2 镜像法

### 注意事项:

- ① 求解区域内不能做任何改变;
- ② 镜像电荷分布必须位于求解区域之外或边界上, 即其产生的场在求解区域内必须满足拉普拉斯方程;
- ③ 镜像电荷分布不是唯一的;
- ④ 解仅对求解区域 $x > 0$ 有效, 镜像电荷分布与求解区域之外和边界上电荷的实际分布方式无关;
- ⑤ 无限大接地导体前任意给定电荷分布所感应的面电荷分布均可用镜像电荷代替。

## § 3.2 镜像法

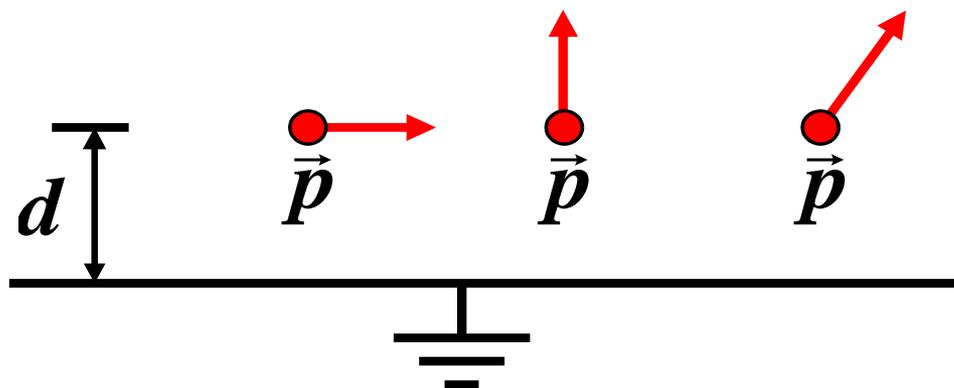
【例】：



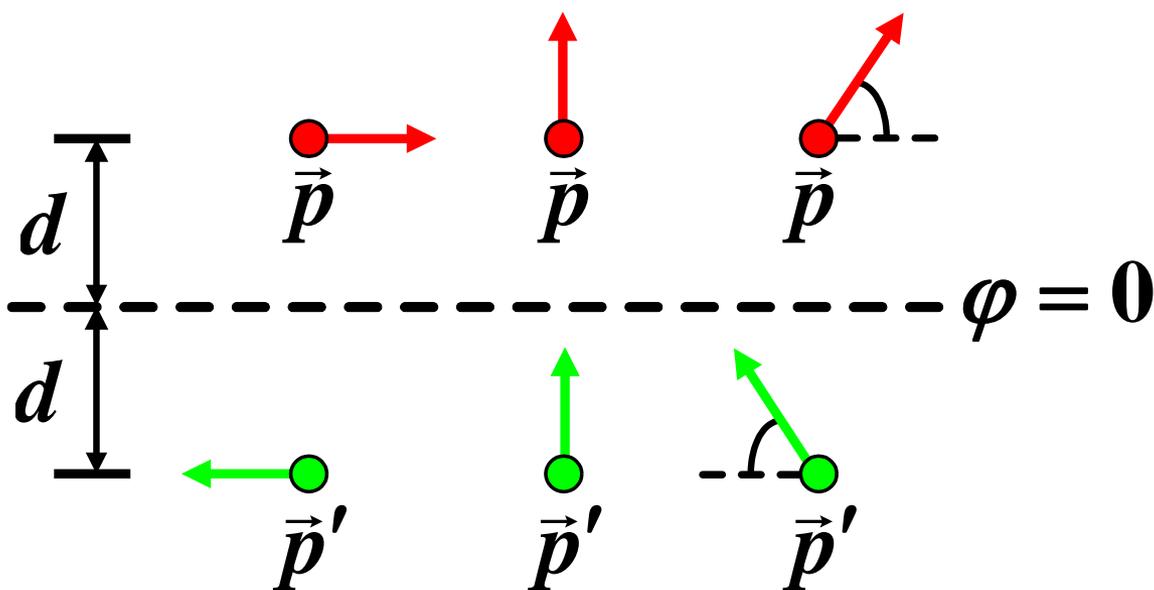
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \delta_{n0}} \left\{ \frac{1}{[(x - na)^2 + \rho^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x + na)^2 + \rho^2]^{1/2}} \right\}$$

## § 3.2 镜像法

【例】：电偶极子的镜像



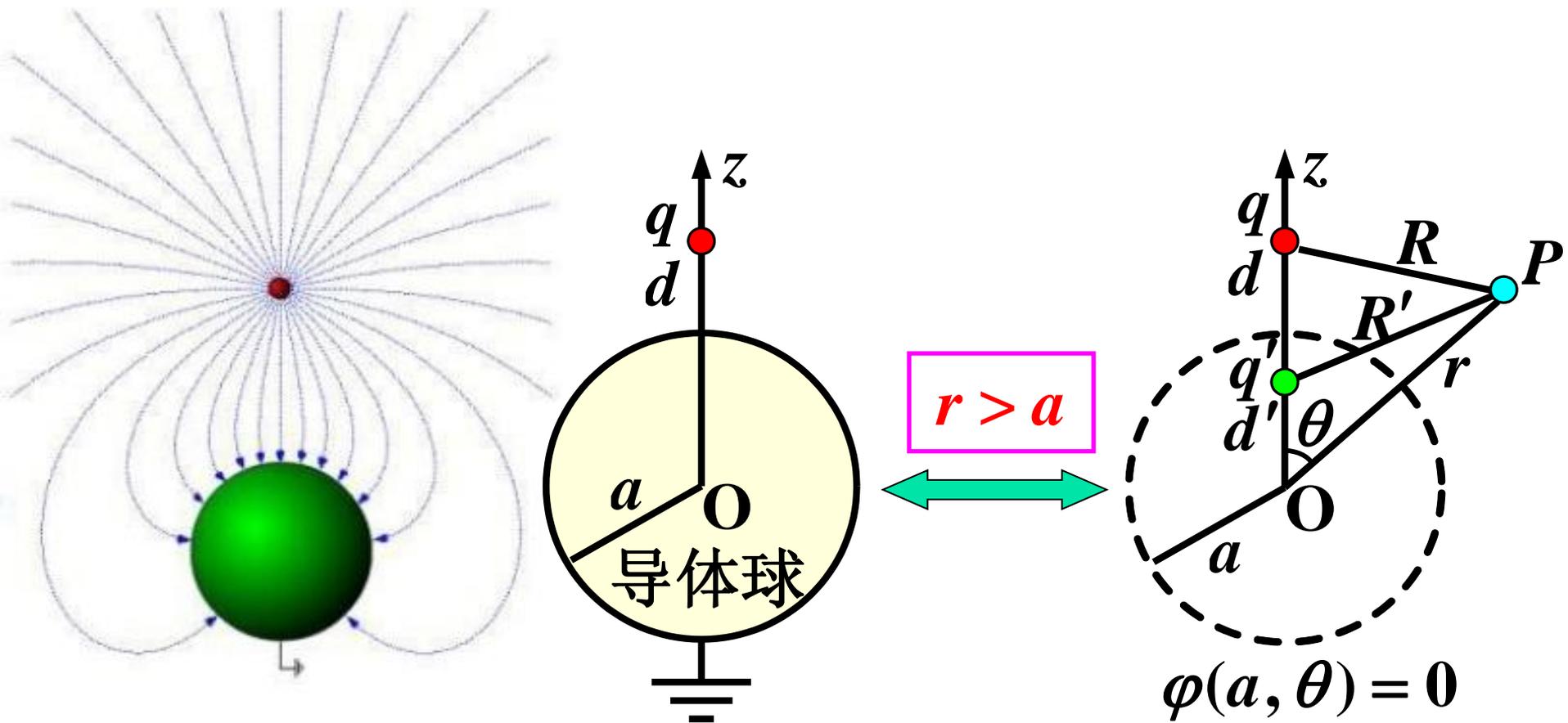
接地平面以上



## § 3.2 镜像法

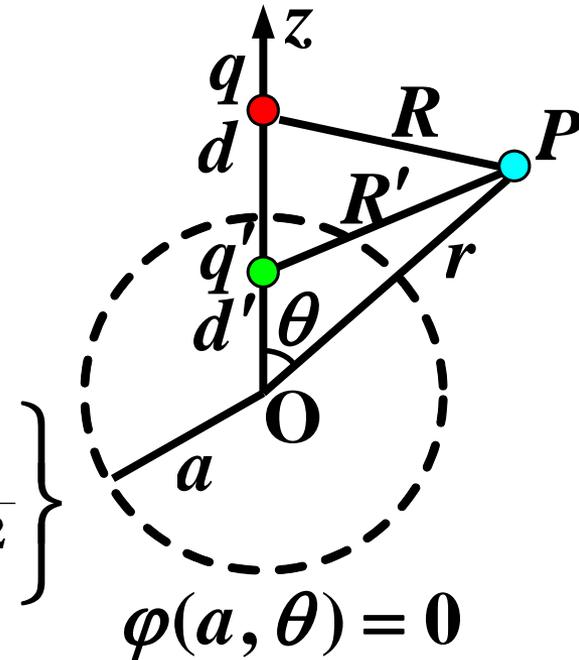
### 二、点电荷对接地导体球面的镜像

$$\varphi = \varphi(r, \theta)$$



## § 3.2 镜像法

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q'}{(r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta)^{1/2}} \right\} \end{aligned}$$



由  $\varphi|_{r=a} = 0 \rightarrow d' = \frac{a^2}{d}, q' = -\frac{a}{d}q$

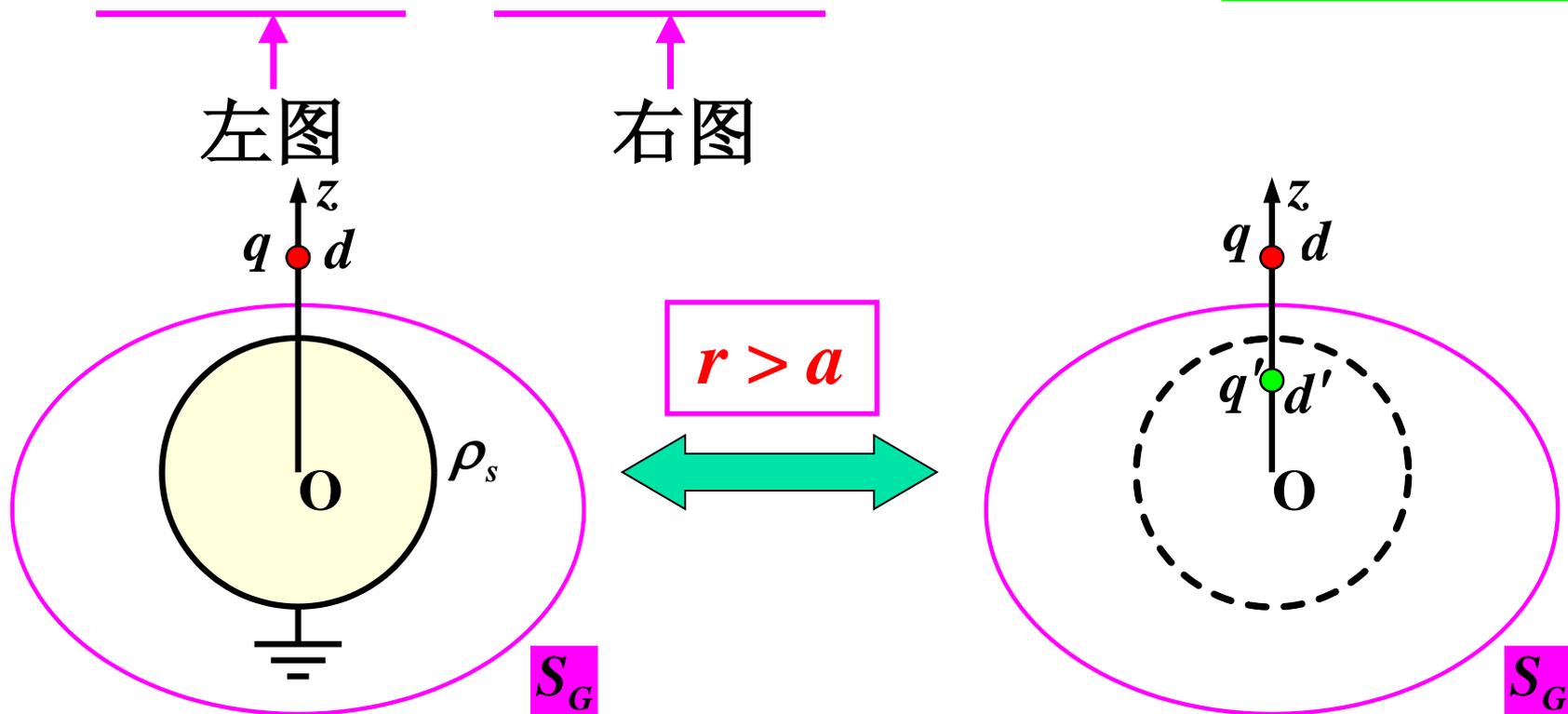
(舍弃:  $d' = d, q' = -q$ )

$dd' = a^2$ , 数学上称  $d$  和  $d'$  关于半径为  $a$  的圆对称。

## § 3.2 镜像法

求原问题的感应电荷总量:

$$q_s = \oint_{S_G} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_G} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q' \longrightarrow q_s = -\frac{a}{d}q \neq -q$$



$|q_s| < |q|$ 。这说明点电荷（设  $q > 0$ ）发出的电力线并不全部终止在导体球表面，有一部分终止在无限远处。

## § 3.2 镜像法

**备注：**若导体球改为导体球壳，结果仍然正确，只是此时感应电荷量为球壳外表面的带电量。并且，无论球壳内部电荷如何分布，结果不变。接地对球壳内外在电性能上起了隔离作用。

➤ 家用电器为何从安全角度考虑应接地 

导体表面的边界条件：

① 当电荷分布有限区域时，选  $\varphi|_{\infty} = 0$ ，给定导体的电位值。

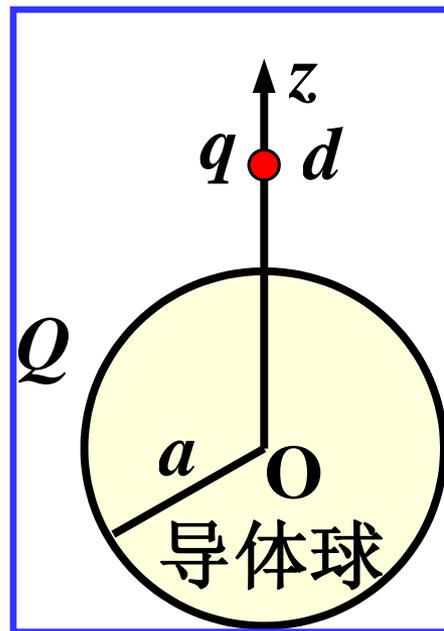
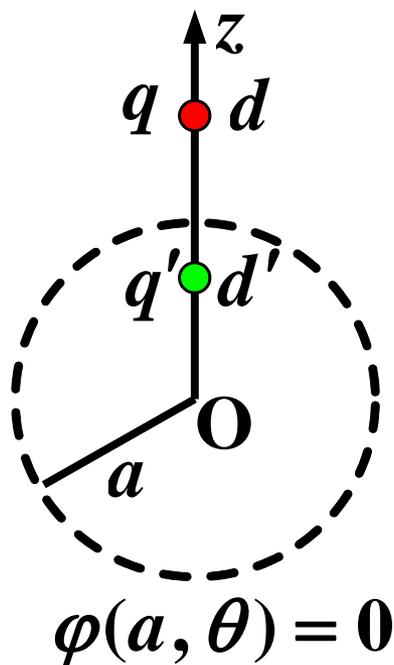
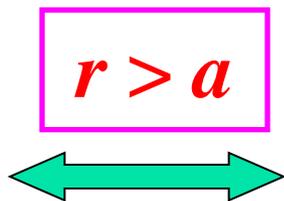
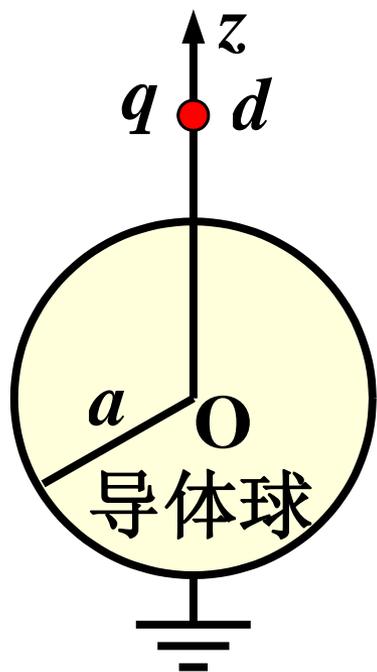
或者

② 给定导体的带电量（+导体等位）。

此时不给定也不应给定导体的电位值。

【例】：孤立导体球，带电量为 $Q$ ，求电位分布。

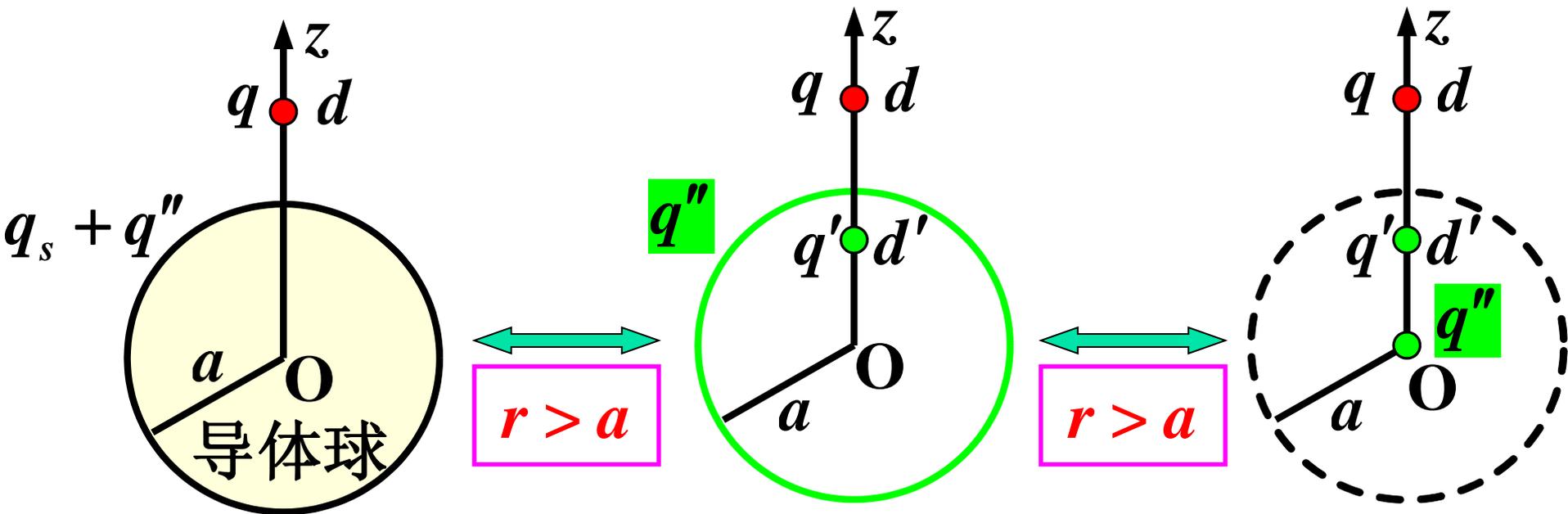
1) 先求解接地的情形



$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{d}q \\ d' = \frac{a^2}{d} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'}, \quad q_s = -\frac{a}{d}q$$

2) 去掉接地装置，在导体表面或假象边界上  $r=a$  上均匀放置  $q''$  电荷。



$$q'' + q_s = Q \longrightarrow q'' = Q - q_s = Q + \frac{a}{d}q$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} + \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r}$$

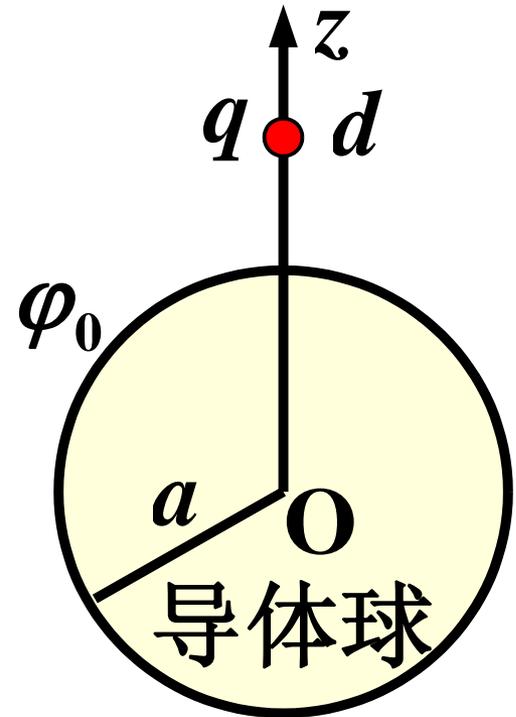
## § 3.2 镜像法

【例】：导体球电位为 $\varphi_0$ ，求电位分布。

解法类似。

$$\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = \varphi_0 \longrightarrow q'' = 4\pi\varepsilon_0 a \varphi_0$$

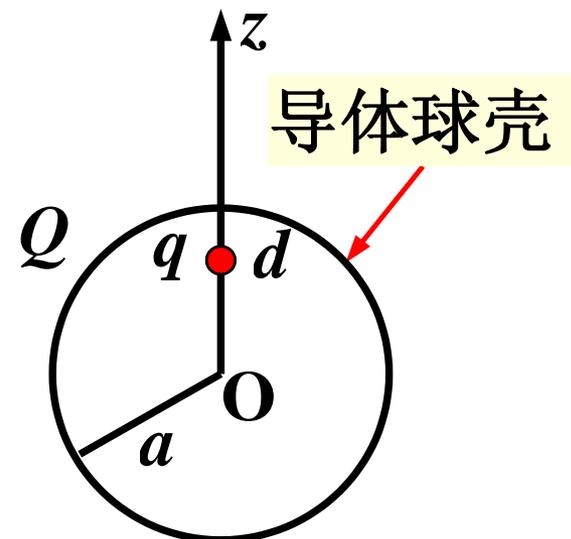
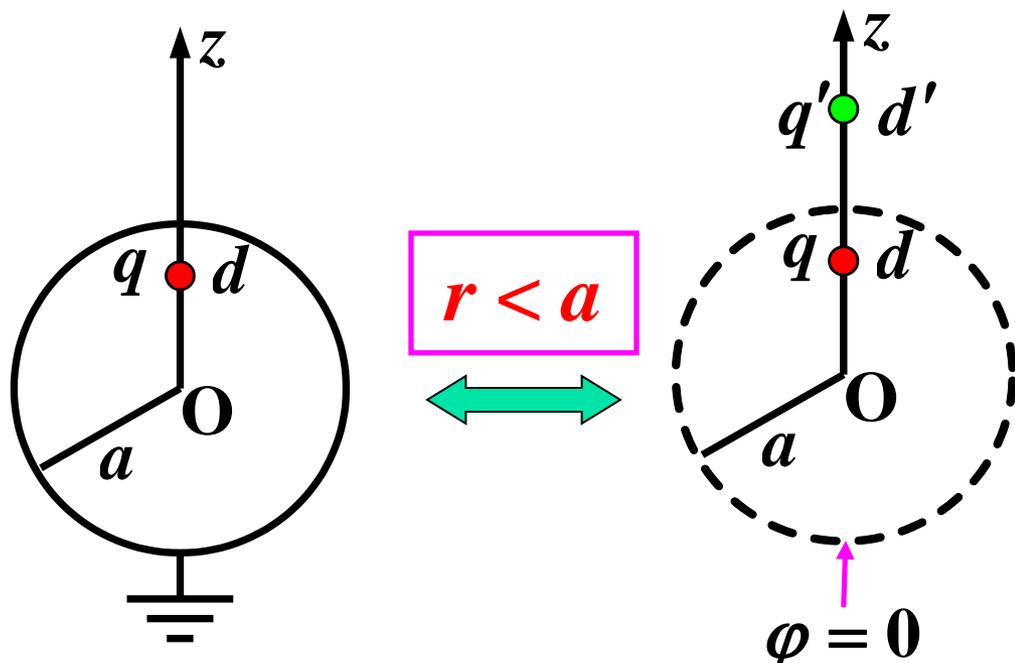
$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'} + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'} + \frac{a\varphi_0}{r}\end{aligned}$$



【例】：孤立导体球壳，带电量为  $Q$ ，球内有一点电荷  $q$ ，其至球心的距离为  $d$ ，求球内外电位分布。

1) 先求解球壳接地的情形

$r > a, \varphi = 0$ , 球壳外表面:  $(q_s)_{\text{外}} = 0$



$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{d}q \\ d' = \frac{a^2}{d} \end{cases}$$

球壳内表面:  $(q_s)_{\text{内}} = -q \neq q'$

## § 3.2 镜像法

$$\varphi = \begin{cases} 0, & r > a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'}, & r < a \end{cases}$$

2) 去掉接地装置, 在导体外表面均匀放置 $q''$ 电荷, 使得

$$q'' + (q_s)_{\text{外}} + (q_s)_{\text{内}} = Q \quad \rightarrow \quad q'' = Q + q$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} + \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 a}, & r < a \end{cases}$$

## § 3.2 镜像法

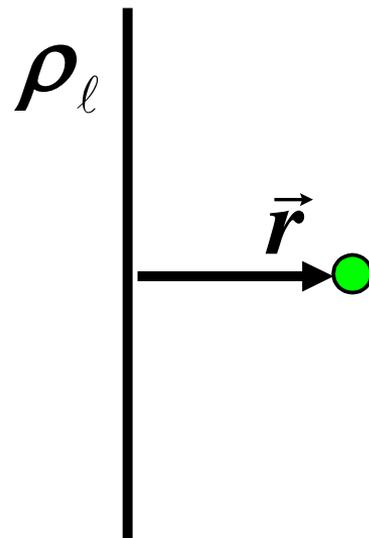
### 三、线电荷对无限长圆柱导体的镜像

无限细无限长线电荷的电场强度与电位：

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

$$\varphi = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

其中， $\vec{r}_0$  为电位零点的位置。  
平面场。

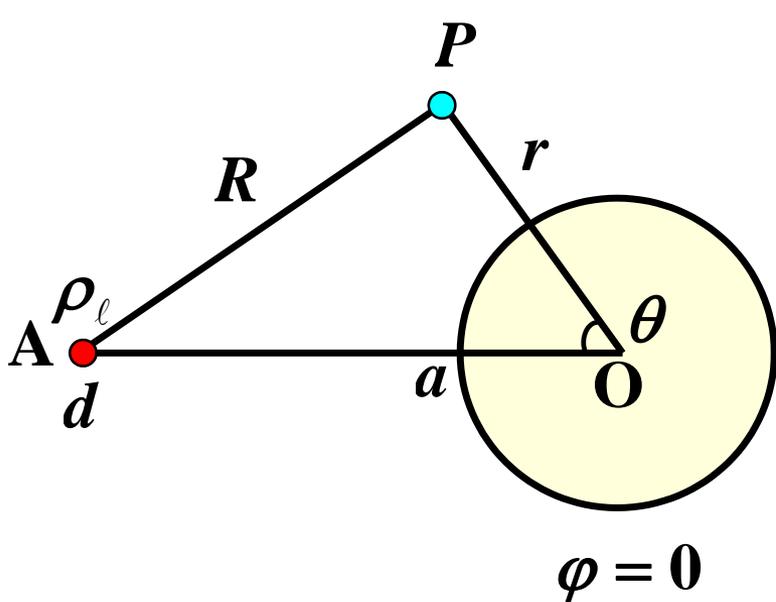


## § 3.2 镜像法

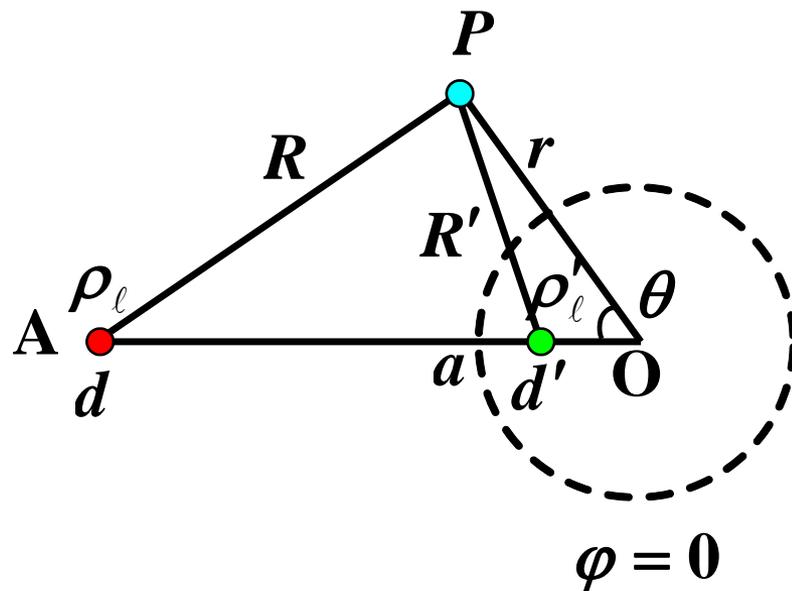
接地?

$\varphi = \varphi(r, \theta)$ 。选  $r = a, \theta = 0$  为电位零点, 则

$$\varphi = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{d-a} - \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{a-d'}$$



$$r > a$$



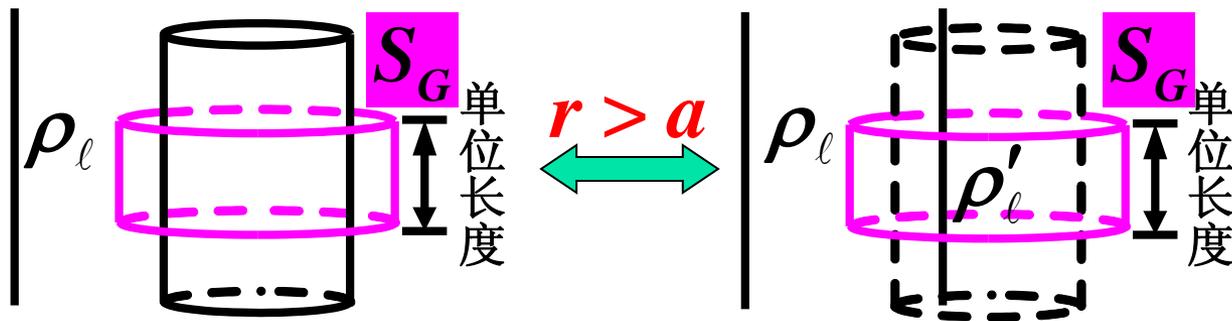
$$\varphi|_{r=a} = 0 \quad \longrightarrow \quad -\rho_l \ln \frac{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}}{d - a}$$

$$= \rho'_l \ln \frac{(a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta)^{1/2}}{a - d'}$$

舍弃不合理的解，得：

$$\rho'_l = -\rho_l, \quad d' = a^2 / d$$

原问题单位长度的感应电荷总量  $q_{sl}$ ：



$$q_{sl} = \epsilon_0 \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \rho'_l$$

## § 3.2 镜像法

问题：解不唯一！

若在导体表面或假象圆柱面上均匀放置电荷  $\rho_l''$  或在圆柱中心放置镜像线电荷  $\rho_l''$ ，则

$$\varphi = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{d-a} - \frac{\rho_l'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{a-d'} - \frac{\rho_l''}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

仍是原问题的解。

问题的根源：本题已给定的边界条件不足以使解唯一！

若给定导体单位长度总带电量  $Q_l$ 。则

$$Q_l = q_{sl} + \rho_l'', \quad \rho_l'' = Q_l - q_{sl} = Q_l + \rho_l$$

解唯一！

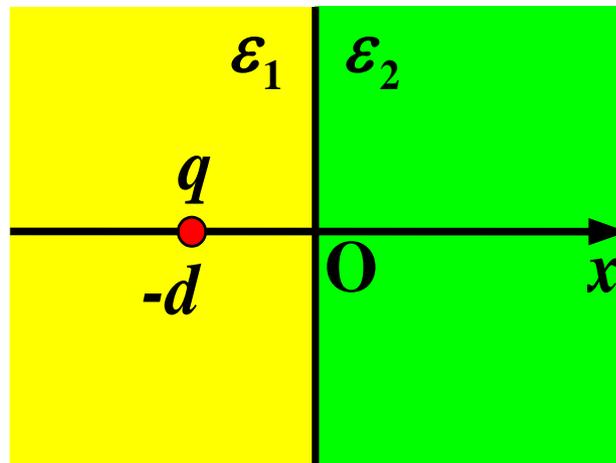
## § 3.2 镜像法

### 四、点电荷对无限大介质交界平面的镜像

等效思想：

分区等效：

$\varphi = \varphi(x, \rho)$ ，轴对称。



## § 3.2 镜像法

$x < 0$

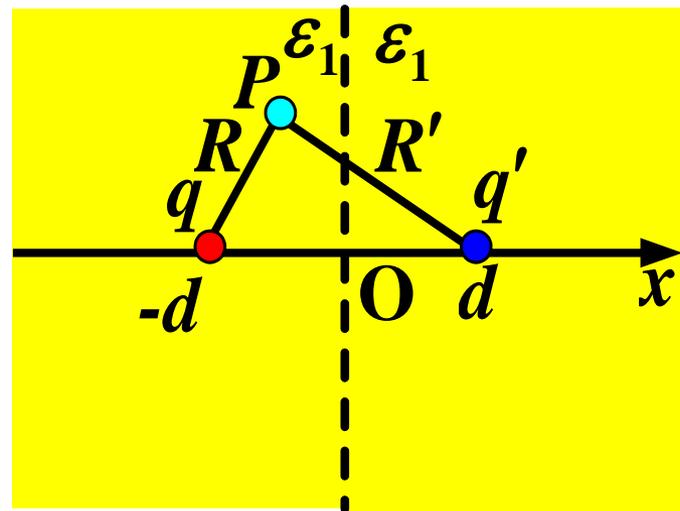
$\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$

$q'$  等效面极化电荷的作用

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 R'}$$

$$R = [(x+d)^2 + \rho^2]^{1/2}$$

$$R' = [(x-d)^2 + \rho^2]^{1/2}$$

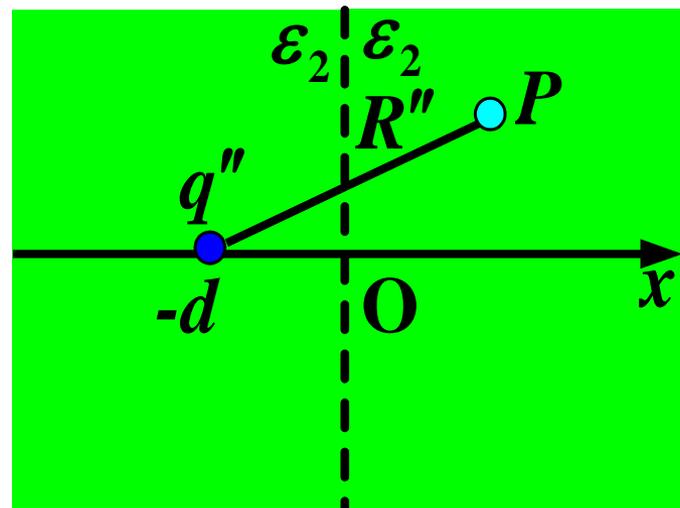


$x > 0$

$\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2, q \rightarrow q''$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 R''}$$

$$R'' = [(x+d)^2 + \rho^2]^{1/2}$$

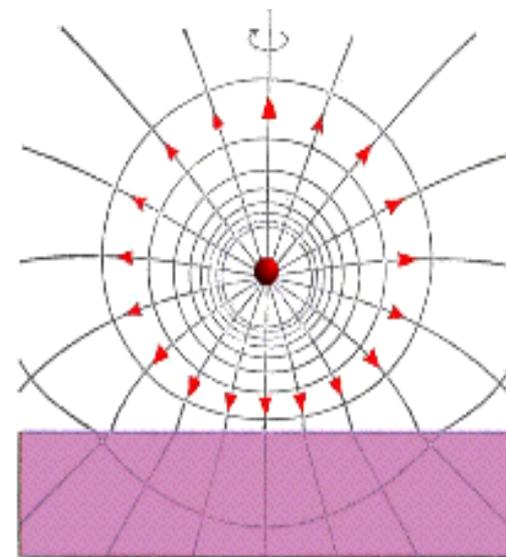


## § 3.2 镜像法

由  $x=0$  时,  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$ ,

得

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2q\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$



点电荷  $q$  位于不同介质平面上方的场图

### 五、电容的计算

【例】：同轴线，二同心导体球壳。

## § 3.2 镜像法

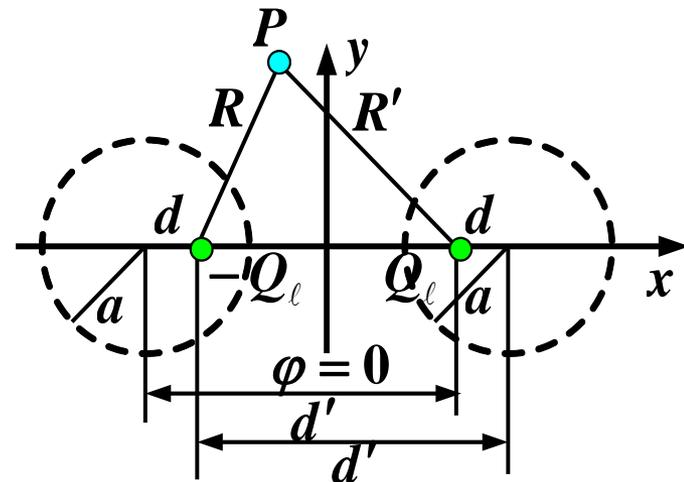
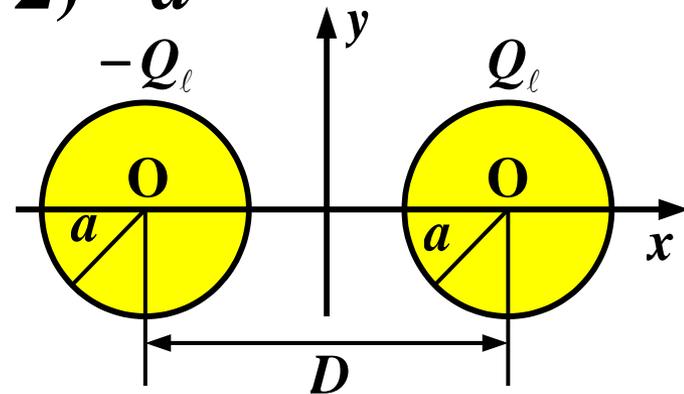
【例】：平行双导线单位长度的电容

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{(D/2) - d} - \frac{Q_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{(D/2) - d} \\ &= \frac{Q_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R'} \end{aligned}$$

$$\varphi_{\text{左}} = -\varphi_{\text{右}}$$

右导体等位  $\longleftrightarrow$  右导体表面  
 $R/R'$  为常数。

$\longrightarrow$  只须使  $dd' = a^2$  即可

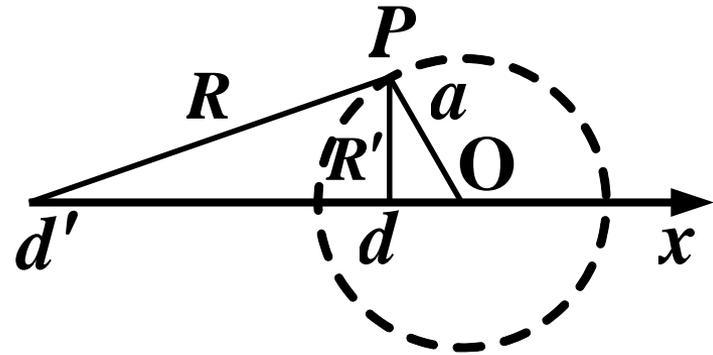


当  $dd' = a^2$  时  $\Delta d'OP$  和  $\Delta dOP$  相似

$$\therefore \frac{d'}{a} = \frac{a}{d} \text{ 且夹角相等}$$

$$\rightarrow \frac{d'}{a} = \frac{a}{d} = \frac{R}{R'}$$

$$\varphi_{\text{右}} = \frac{Q_{\ell}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$



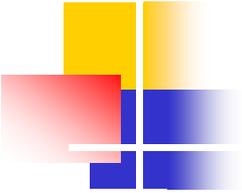
确定  $d$ :

$$d' = D - d, \quad d(D - d) = a^2$$

$$d = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4a^2}}{2}$$

$$\varphi_{\text{右}} = \frac{Q_{\ell}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - 4a^2}}{2a}$$

$$C_{\ell} = \frac{Q_{\ell}}{\varphi_{\text{右}} - \varphi_{\text{左}}} = \pi\epsilon_0 / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - 4a^2}}{2a}$$



## 镜像法小结

- ✦ 镜像法是等效问题的反问题，其**理论基础**是静电场唯一性定理；
- ✦ 镜像法的**实质**是用虚设的镜像电荷替代未知（或已知）区域外以及边界上的电荷分布，使计算场域为无限大均匀介质；
- ✦ 镜像法的**关键**是确定镜像电荷的个数，大小及位置；  
应用镜像法解题时，**注意**：镜像电荷只能放在待求场域以外的区域。**叠加时**，要注意场的适用区域。

## § 3.3 解析函数法

解析函数法 { 复位函数法  
保角变换法

解平面场/柱形场问题

平面场: 点电荷 → 线电荷  
曲线 → 曲面  
面积 → 体积

某点  $z_0$  可微:  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$  存在

某点  $z_0$  解析: 在  $z_0$  点及其某个邻域可微。

## § 3.3 解析函数法

$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在某区域  $D$  (开域) 解析

↔ 在  $D$  内满足 **C-R** 方程: 
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

**$f'(z)$** 的几何意义:

$w=f(z)=u+iv$  ——  $Z$  平面到  $W$  平面的变换

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \text{ 设 } f'(z_0) \neq 0$$

## § 3.3 解析函数法

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \quad \text{—— 线元 } \Delta z \text{ 的放大系数}$$

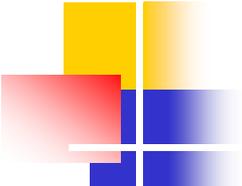
$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z)$$

—— 线元  $\Delta z$  的幅角变化

放大系数及幅角变化均与  $\Delta z$  的取向无关。若  $z_0$  点有二个线元, 则其夹角变化前后不变。称  $f(z)$  在  $z_0$  点具有**保角性**。

**单叶函数**: 在区域  $D$  内  $w=f(z)$  解析, 作为变换  
( $Z \rightarrow W$ ) 一一对应。

若  $f(z)$  在区域  $D$  内单叶  $\longrightarrow$  对任意  $z \in D, f'(z) \neq 0$



## § 3.3 解析函数法

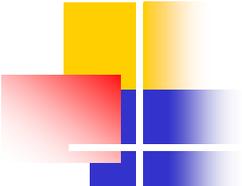
保角变换：区域 $D$ 内单叶函数确定的变换。

复变函数中区域 $D$ 是一个开集，不包括边界点。因此，保角变换的保角仅指区域内部，不包括边界点。

例：Schwarz–Christoffel变换

### 一、复位函数法

解拉普拉斯方程



## § 3.3 解析函数法

若 $f(z)$ 解析  $\longrightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$u$ 、 $v$ 称为调和函数。

复位函数法的基本思想：直接将某解析函数 $f(z)$ 的实部或虚部作为满足拉普拉斯方程的某静电问题的解，但同时必须使其满足静电问题的边界条件。

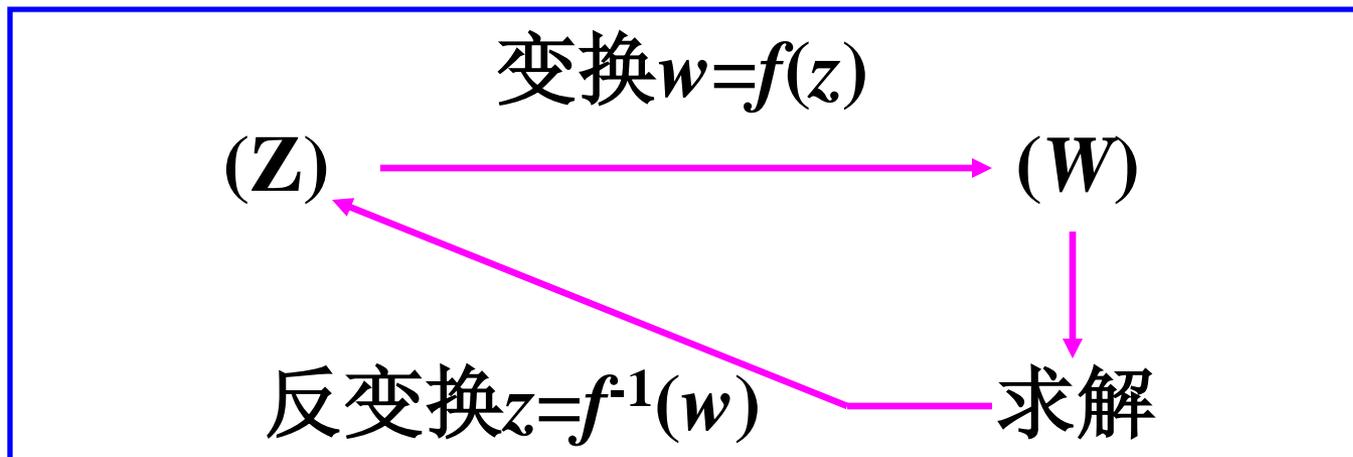
此 $f(z)$ 称为此静电问题的复位函数。

## § 3.3 解析函数法

### 二、保角变换法

解泊松方程包括拉普拉斯方程。

**基本思想：**用保角变换将复杂区域变为简单区域，在变换后的 $W$ 平面上求解。由于保角变换为区域内的一一对应变换， $W$ 平面完成求解后再变回到 $Z$ 平面。



## § 3.3 解析函数法

$$\nabla_{(x,y)}^2 \phi = |f'(z)|^2 \nabla_{(u,v)}^2 \phi$$

(Z)      C-R      (W)

$$(Z): \quad \nabla^2 \phi = -\rho / \varepsilon$$

$$(W): \quad \nabla^2 \phi = -\rho^* / \varepsilon, \quad \rho^* = \rho / |f'(z)|^2$$

变换后:

1) **总电量不变:**

$$Q = \int_S \rho dx dy = \int_S \rho^* du dv = Q^*$$

(Z)      (Z)                  (W)      (W)

2) **电容不变**

若仅求电容, 不必变回 Z 平面计算。

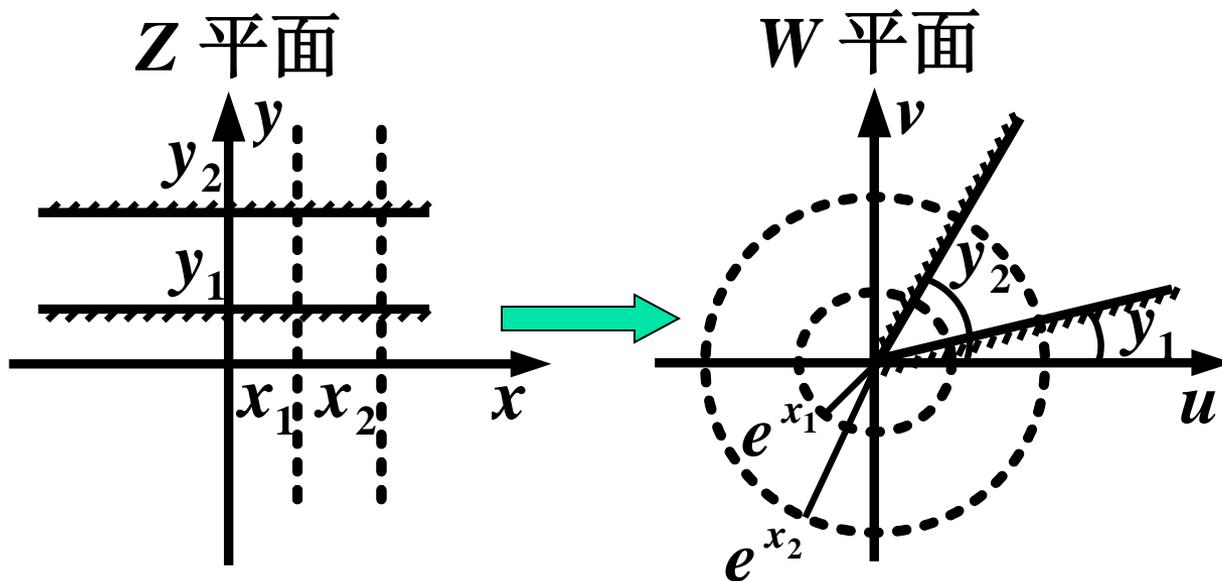
## § 3.3 解析函数法

若干初等函数的变换性质:

① 指数函数  $w = e^z$

$$z = x + iy, \quad w = e^{x+iy},$$

$$\begin{cases} |w| = e^x \\ \arg w = y \end{cases}$$



单叶性区域:  $y_2 - y_1 \leq 2\pi$ 。

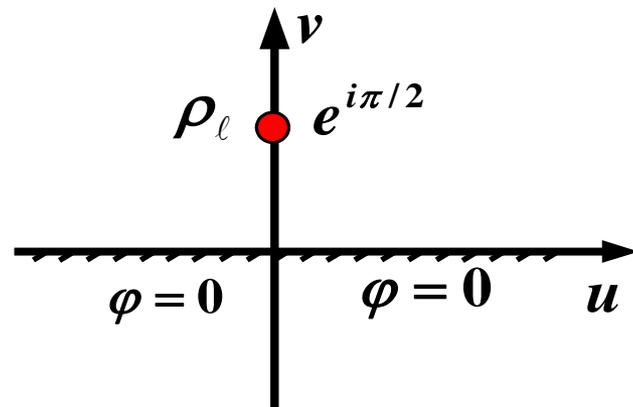
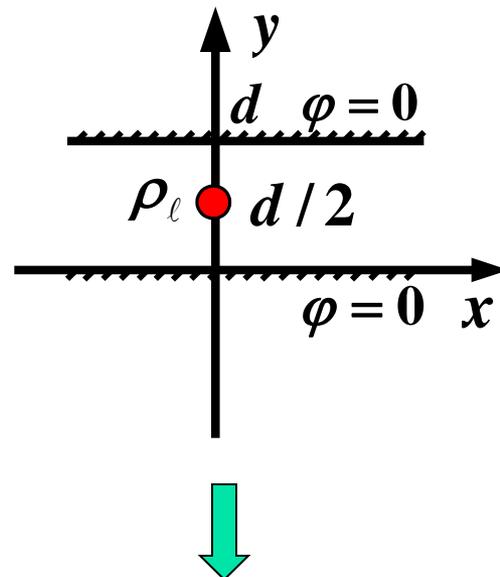
# § 3.3 解析函数法

【例】：求电位分布

$$w = e^{\frac{\pi}{d}z} = e^{\frac{\pi}{d}x + i\frac{\pi}{d}y}$$

$$\phi = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{d}z} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{d}z} - e^{i\frac{\pi}{2}}} \right|$$

$$= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + 2e^{\frac{\pi}{d}x} \sin \frac{\pi}{d}y + e^{\frac{2\pi}{d}x}}{1 - 2e^{\frac{\pi}{d}x} \sin \frac{\pi}{d}y + e^{\frac{2\pi}{d}x}}$$

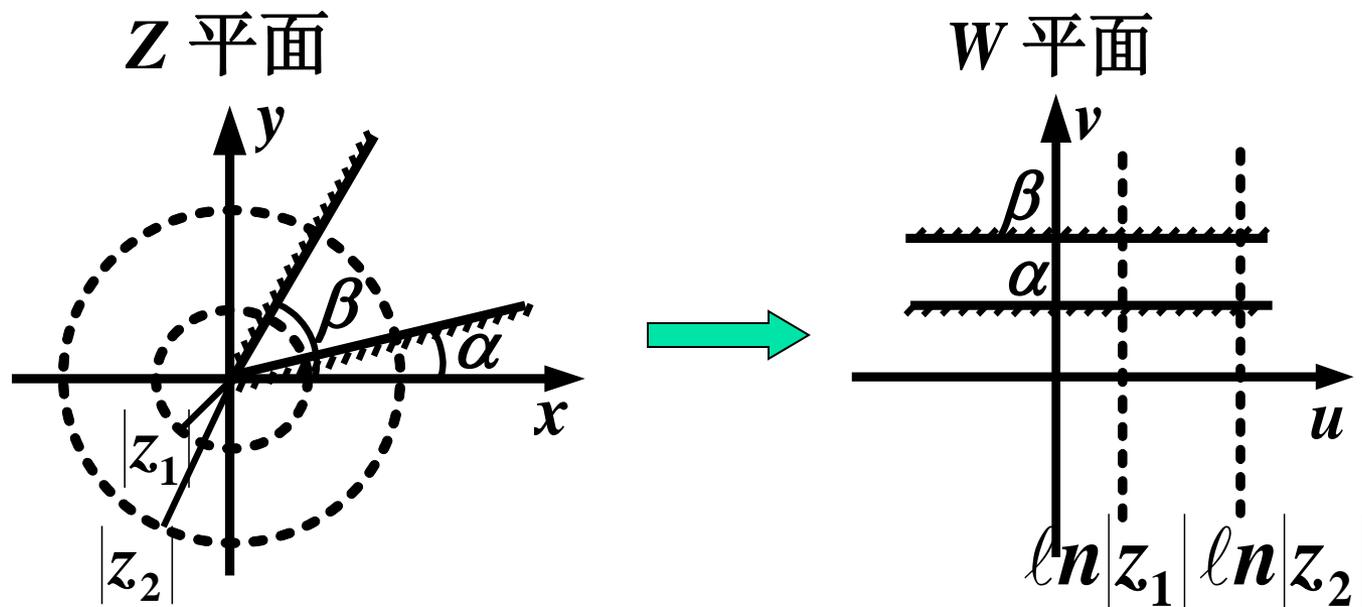


## § 3.3 解析函数法

### ② 对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

主值:  $w = \ln z = \ln|z| + i \arg z$



单叶性区域:  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ 。

## § 3.3 解析函数法

### ③ 幂函数 $w = z^\alpha$ ( $\alpha$ 为实数)

定义:  $w = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$

(规定  $z=0$  时,  $w=0$ )

主值:  $w = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha \ln |z| + i \alpha \arg z}$

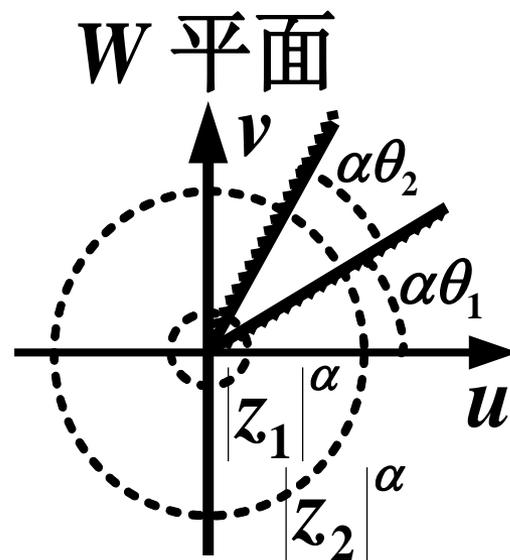
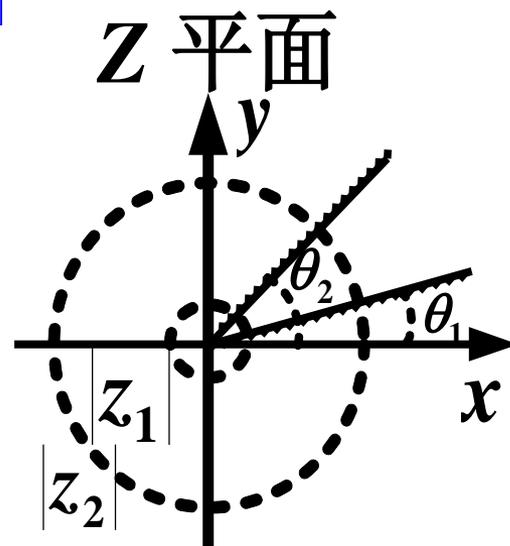
$$|w| = |z|^\alpha, \quad \arg w = \alpha \arg z$$

$\alpha = n$ , 为整数次方幂函数  $w = z^n$ 。

$\alpha = 1/n$ , 为根式函数  $w = \sqrt[n]{z}$ 。

单叶性区域:

$$\theta_2 - \theta_1, \alpha(\theta_2 - \theta_1) \leq 2\pi。$$



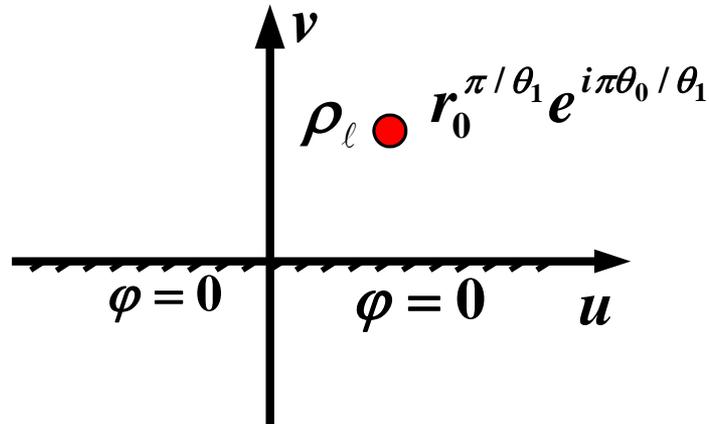
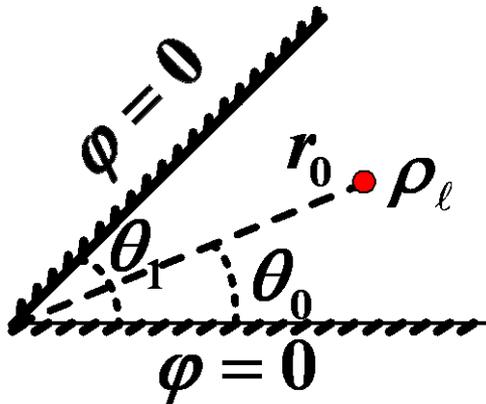
# § 3.3 解析函数法

【例】：求电位分布

$$w = z^\alpha = z^{\pi/\theta_1} = r^{\pi/\theta_1} e^{i\pi\theta/\theta_1}$$

$$\varphi = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{r^{\pi/\theta_1} e^{i\pi\theta/\theta_1} - r_0^{\pi/\theta_1} e^{-i\pi\theta_0/\theta_1}}{r^{\pi/\theta_1} e^{i\pi\theta/\theta_1} - r_0^{\pi/\theta_1} e^{i\pi\theta_0/\theta_1}} \right| = \dots$$



## § 3.4 分离变量法

方程、边界条件齐次或非齐次：

“某一方向齐次”： 该方向所有边界条件均齐次。

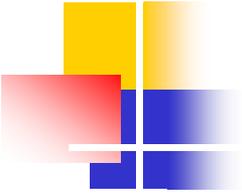
“某一方向非齐次”： 该方向至少有一边界条件非齐次

分离变量法要点：

① 能直接求解的问题：

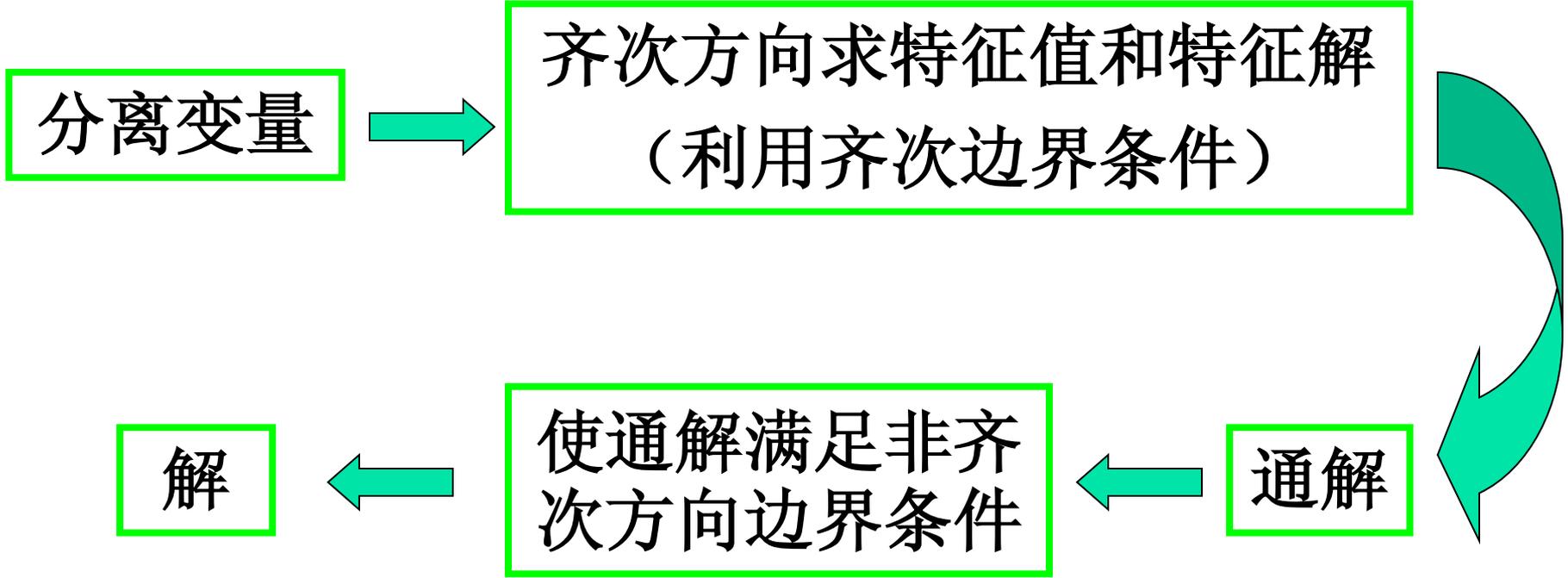
{ 齐次方程  
边界条件仅在一个方向非齐次

(I)



# § 3.4 分离变量法

求解步骤:



## § 3.4 分离变量法

②

齐次方程

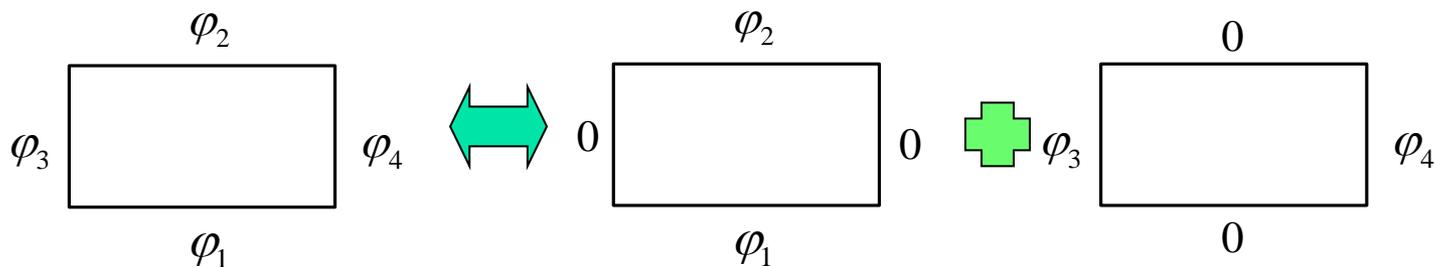
一般非齐次边界条件

(II)

根据迭加原理分解，将问题 (II) 转化为问题 (I)

(A) 一般非齐次边界条件分解为若干个仅在一个方向非齐次的边界条件。

例：



(B) 寻找齐次方程特解  $\varphi_0$ ，令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ ，  
则  $\nabla^2 \varphi' = 0$ ，并使得  $\varphi'$  的边界条件满足  
仅在一个方向非齐次。

## § 3.4 分离变量法

③ { 非齐次方程  
一般非齐次边界条件 ( III )

根据迭加原理分解，将问题 ( III ) 转化为问题 ( II )

(A) 寻找非齐次方程特解  $\varphi_0$ ，令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ ，  
则  $\nabla^2 \varphi' = 0$ 。

(B) 分区：

适合于点、线、面电荷分布

例：点电荷

## § 3.4 分离变量法

### 一、直角坐标系中的分离变量法

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X''}{X} = C_x, \quad \frac{Y''}{Y} = C_y, \quad \frac{Z''}{Z} = C_z \\ C_x + C_y + C_z = 0 \end{array} \right.$$

$$C_x + C_y + C_z = 0$$

# § 3.4 分离变量法

函数的选取:

$$\frac{X''}{X} = C_x$$



$x$  方向齐次:

$$C_x = -k_x^2 \leq 0$$

振荡型函数

$x$  方向非齐次:

$$C_x = k_x^2 \geq 0$$

衰减型函数

$$\begin{cases} \sin(k_x x) \\ \cos(k_x x) \end{cases}$$

$$k_x = 0, \begin{cases} x \\ 1 \end{cases}$$

$$k_x \neq 0, \begin{cases} \text{sh}(k_x x) \\ \text{ch}(k_x x) \end{cases}$$

若  $b \rightarrow \infty$ ,  
且  $\varphi$  有限:

$$e^{-k_x x}$$

若  $a \rightarrow -\infty$ ,  
且  $\varphi$  有限:

$$e^{k_x x}$$

## § 3.4 分离变量法

【例】：求电位分布

$$C_y = -k_y^2$$

$$Y = A \sin k_y y + B \cos k_y y$$

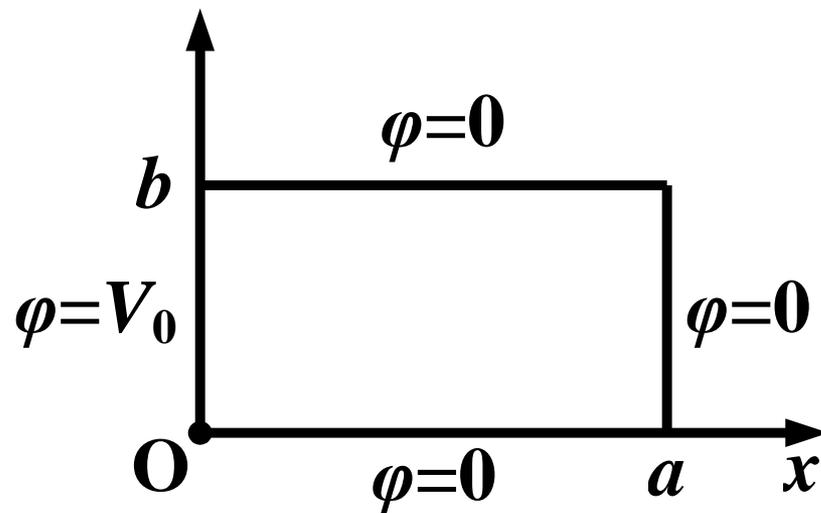
$$y = 0, \varphi = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y = b, \varphi = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$C_x = k_x^2 = -C_y \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{b}$$

$$X = C \operatorname{sh} \frac{n\pi(a-x)}{b} + D \operatorname{ch} \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$x = a, \varphi = 0 \Rightarrow D = 0$$



## § 3.4 分离变量法

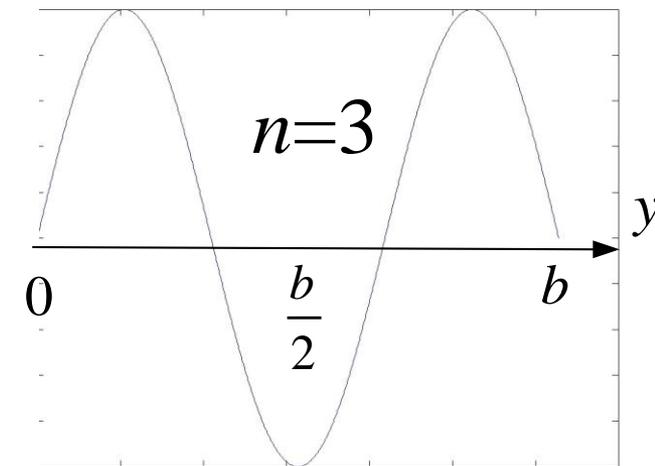
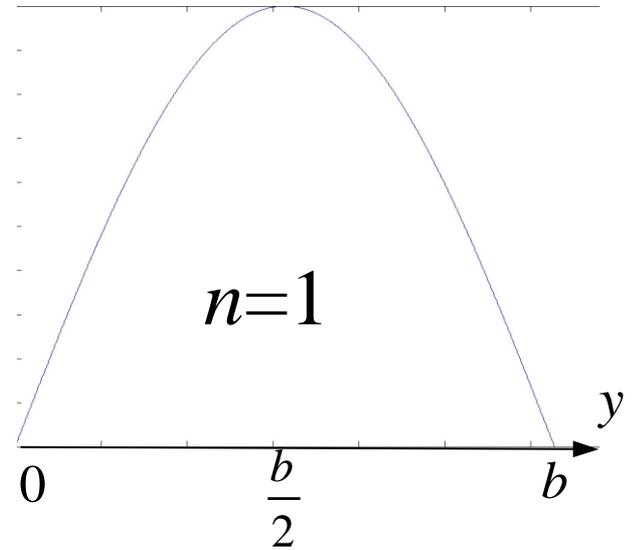
$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$x = 0, \varphi = V_0$$

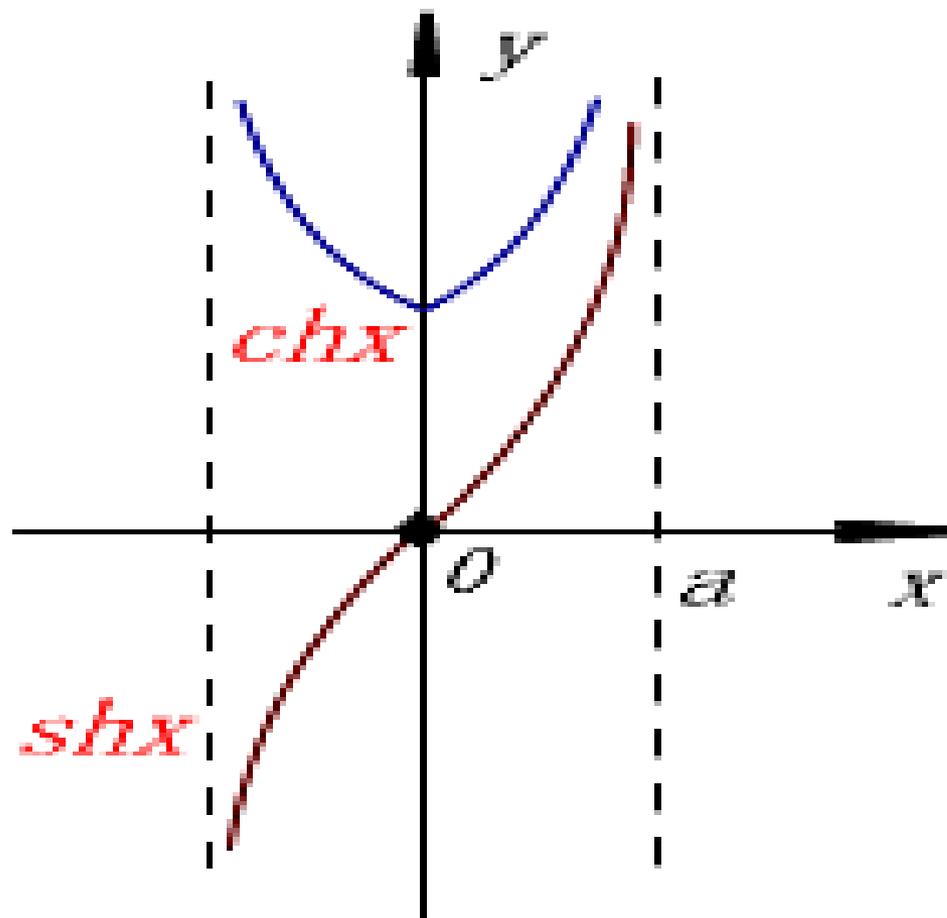
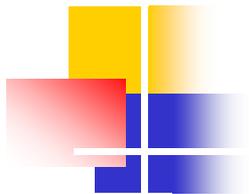
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} = V_0$$

由三角函数的正交性，得

$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}, n=1, 3, 5, \dots$$



【pp. 84-86, 例3-5】



双曲函数

## § 3.4 分离变量法

### 二、圆柱坐标系中的分离变量法

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\varphi = R(\rho)G(\theta)Z(z)$$

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{G''}{G} + \rho^2 \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\text{令 } G''/G = C_\theta, \quad Z''/Z = C_z$$

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + C_\theta + C_z \rho^2 = 0 \quad (\text{I})$$

## § 3.4 分离变量法

设 $\theta$ 方向齐次

取振荡型函数

$$C_\theta = -\nu^2 \leq 0$$

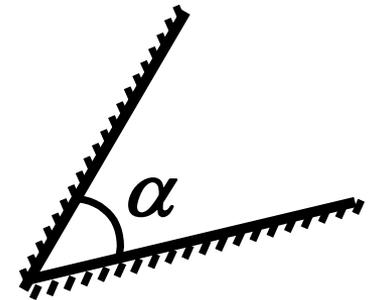
$$G(\theta) = \begin{cases} \sin \nu\theta \\ \cos \nu\theta \end{cases}$$

特别，若 $\theta$ 方向没有边界，则

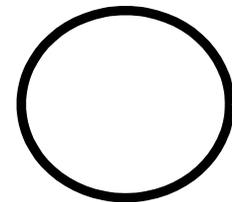
$$\nu = n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) - \nu^2 + C_z \rho^2 = 0$$

★ p. 86



$$0 \leq \alpha \leq 2\pi$$



$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$$

(II)

## § 3.4 分离变量法

### 1、平面场:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad C_z = 0$$

$z$  方向齐次,  $\rho$  方向非齐次。

由方程(II)得

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \nu^2 R = 0 \quad \text{—— 欧拉方程}$$

$$\nu = 0, \quad R(\rho) = \begin{cases} 1 \\ \ln \rho \end{cases};$$

$$\nu \neq 0, \quad R(\rho) = \begin{cases} \rho^\nu \\ \rho^{-\nu} \end{cases}$$

## § 3.4 分离变量法

### 2、z方向非齐次，ρ方向齐次：

衰减型

振荡型

$$C_z = k_z^2 \geq 0$$

$$k_z = 0, Z(z) = \begin{cases} z \\ 1 \end{cases};$$

$$k_z \neq 0, Z(z) = \begin{cases} \operatorname{sh} k_z z \\ \operatorname{ch} k_z z \end{cases}$$

$C_z = k_z^2$ 代入方程(II)，令  $x = k_z \rho$ ，得

$$\frac{x}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \nu^2 + x^2 = 0$$

$$\longrightarrow R'' + \frac{1}{x} R' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad \text{—— Bessel 方程}$$

# § 3.4 分离变量法

$$R = \begin{cases} J_\nu(k_z \rho) & \text{— 第一类Bessel函数} \\ N_\nu(k_z \rho) & \text{— 第二类Bessel函数} \end{cases}$$

$$x \rightarrow 0,$$

$$J_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu \neq 0 \end{cases}$$

$$N_\nu(x) \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty,$$

$$J_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

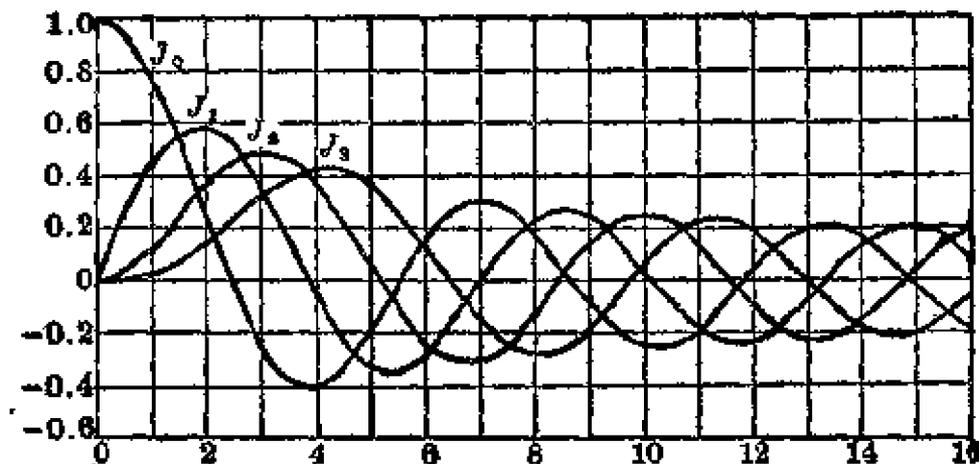


图 D-1 第一类贝塞尔函数

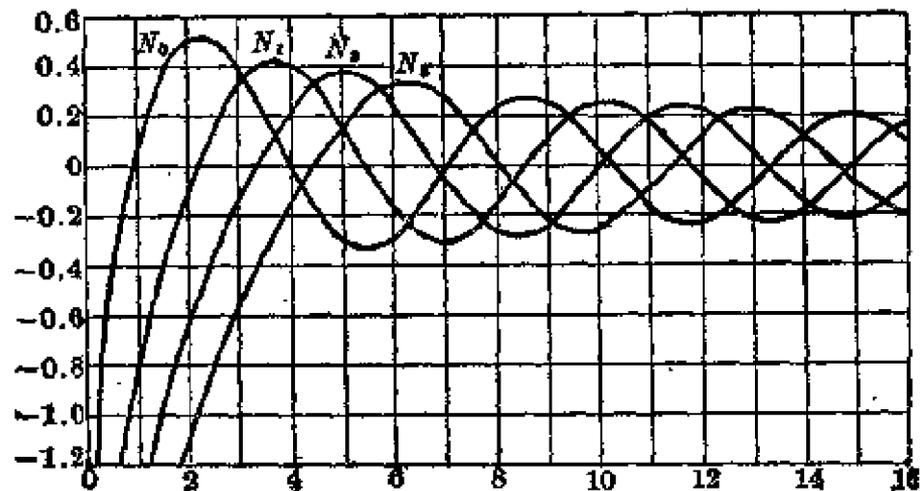


图 D-2 第二类贝塞尔函数

## § 3.4 分离变量法

### 3、z方向齐次， $\rho$ 方向非齐次：

振荡型

衰减型

$$C_z = -k_z^2 \leq 0$$

$$Z(z) = \begin{cases} \sin k_z z \\ \cos k_z z \end{cases}$$

$C_z = -k_z^2$ 代入方程(II)，令  $x = k_z \rho$ ，得

$$\frac{x}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \nu^2 - x^2 = 0$$

$$\longrightarrow R'' + \frac{1}{x} R' - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad \text{— 变型 Bessel 方程}$$

## § 3.4 分离变量法

$$R = \begin{cases} I_\nu(k_z \rho) & \text{— 第一类变型 Bessel 函数} \\ K_\nu(k_z \rho) & \text{— 第二类变型 Bessel 函数} \end{cases}$$

$x \rightarrow 0,$

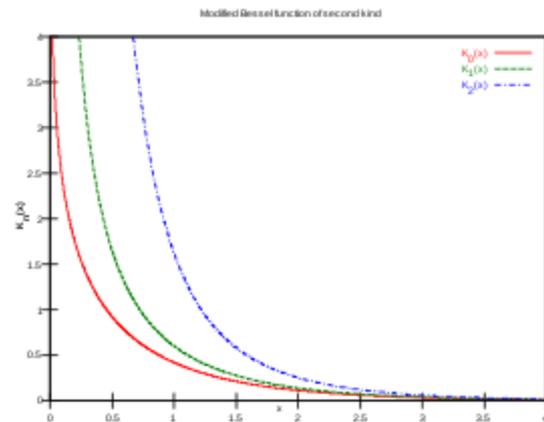
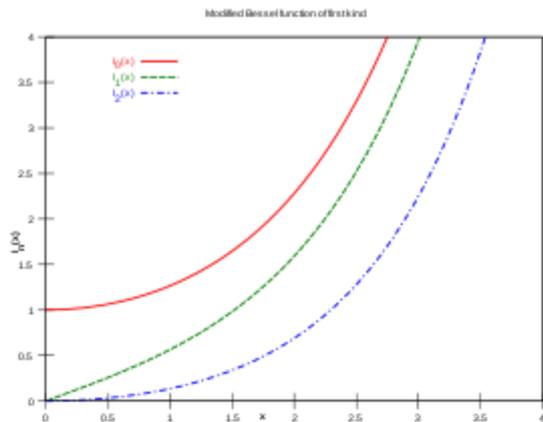
$$I_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu \neq 0 \end{cases}$$

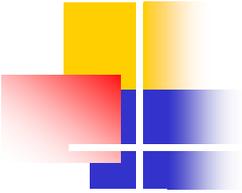
$$K_\nu(x) \rightarrow \infty$$

$x \rightarrow \infty,$

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$





# § 3.4 分离变量法

假定 $\theta$ 方向齐次			
条件	$\rho$ 方向	$\theta$ 方向	$z$ 方向
平面场, $z$ 方向均匀	$\gamma = 0$ 时, $\begin{cases} 1 \\ \ln \rho \end{cases}$ $\gamma \neq 0$ 时, $\begin{cases} \rho^\gamma \\ \rho^{-\gamma} \end{cases}$	$\begin{cases} \sin \gamma \theta \\ \cos \gamma \theta \end{cases}$  $\theta$ 方向为圆周 (即无边界) 时 $\gamma = n = 0, 1, 2, 3, \dots$	/
$\rho$ 方向齐次 $z$ 方向非齐次	$\begin{cases} J_\gamma(k_z \rho) \\ N_\gamma(k_z \rho) \end{cases}$		$k_z = 0$ 时, $\begin{cases} 1 \\ z \end{cases}$ $k_z \neq 0$ 时, $\begin{cases} \sinh k_z z \\ \cosh k_z z \end{cases}$
$\rho$ 方向非齐次 $z$ 方向齐次	$\begin{cases} I_\gamma(k_z \rho) \\ K_\gamma(k_z \rho) \end{cases}$		$\begin{cases} \sin k_z Z \\ \cos k_z Z \end{cases}$

## § 3.4 分离变量法

【pp. 89-90, 例3-6】：求圆柱内的电位。

$\theta$  方向齐次且解圆对称  $\rightarrow v=0$

$$R = \begin{cases} J_0(k_z \rho) \\ \cancel{N_0(k_z \rho)} \rightarrow \text{舍弃} (\rho = 0, \varphi \text{有限}) \end{cases}$$

$\rho$  方向求特征值和特征解：

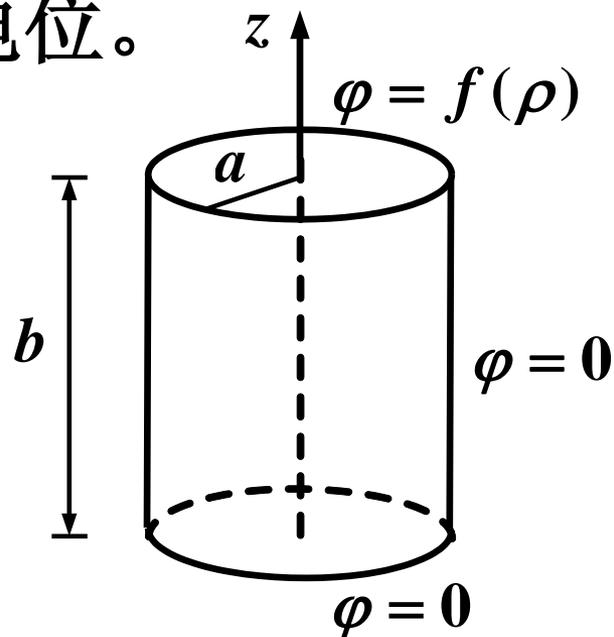
$$\varphi|_{\rho=a} = 0 \rightarrow J_0(k_z a) = 0$$

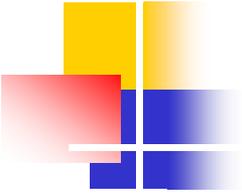
记  $\alpha_{0n}$  为零阶 Bessel 函数的第  $n$  个根，则

$$k_{zn} = \alpha_{0n} / a \quad (k_{zn} \neq 0)$$

$z$  方向， $k_z \neq 0$ ，有

$$Z(z) = \begin{cases} \text{sh}k_z z \\ \cancel{\text{ch}k_z z} \rightarrow \text{舍弃} (z = 0, \varphi = 0) \end{cases}$$





## § 3.4 分离变量法

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(k_{zn}z) J_0(k_{zn}\rho)$$

$$\varphi|_{z=b} = f(\rho) \longrightarrow f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(k_{zn}b) J_0(k_{zn}\rho)$$

两边同乘  $\rho J_0(k_{zm}\rho)$ ，从 0 到  $a$  积分，  
并利用 Bessel 函数的正交性：

$$\int_0^a \rho J_0(k_{zm}\rho) J_0(k_{zn}\rho) d\rho = \frac{a^2}{2} J_1^2(k_{zm}a) \delta_{mn} \quad (3-108)$$

可得

$$A_m = \frac{2}{a^2 \operatorname{sh}(k_{zm}b) J_1^2(k_{zm}a)} \int_0^a f(\rho) J_0(k_{zm}\rho) \rho d\rho$$

## § 3.4 分离变量法

【pp. 90-91, 例3-7】：求此平面场的电位分布。

$\theta$  方向求特征值和特征解：

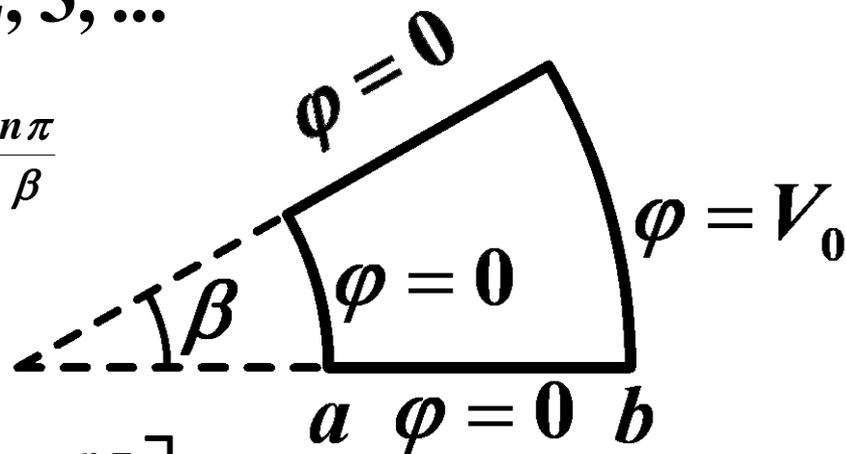
$$G(\theta) \sim \sin \nu \theta, \quad \nu = \frac{n\pi}{\beta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\nu \neq 0, \quad R(\rho) = C \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} + D \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\beta}}$$

$$\varphi|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow C + D = 0$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \theta\right) \left[ \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\beta}} \right]$$

$$\varphi|_{\rho=b} = V_0 \Rightarrow A_n = \dots$$

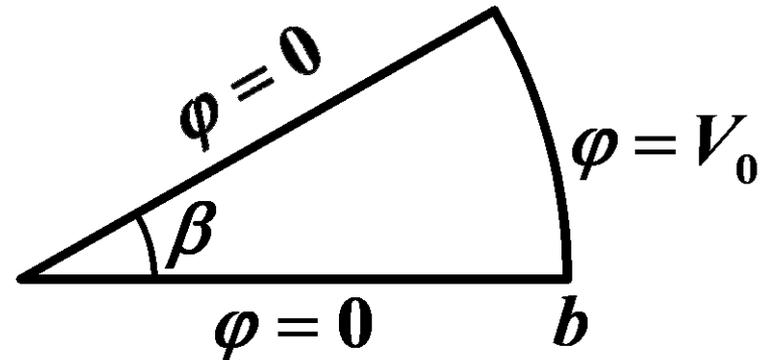


# § 3.4 分离变量法

$$\varphi = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right) \left[ \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\beta}} \right]}{n \left[ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\beta}} \right]}$$

特别，若  $a \rightarrow 0$ ，则

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right)}{n} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\beta}\theta\right) \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\frac{\pi}{\beta}} + \dots \end{aligned}$$



**边缘处场的奇异性：**指电场或磁场在导体或介质边缘处的奇异性。

$\rho \rightarrow 0$

$$E_\rho = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} \sim \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin\frac{\pi}{\beta}\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \sim \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\frac{\pi}{\beta}\theta$$

**边缘条件：**边缘任一有限邻域电磁场的储能为有限值。

**说明：** ①②③

 **避雷针原理**

$$E_\rho, E_\theta \sim \rho^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta = 2\pi$$



$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

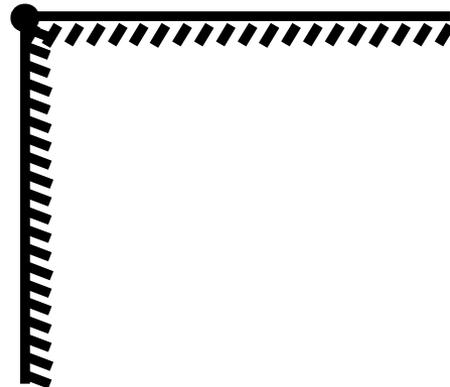
$$E_\rho, E_\theta \sim \rho^1$$

$$\beta = \pi$$

$$E_\rho, E_\theta \sim \rho^0 = 1$$

$$E_\rho, E_\theta \sim \rho^{-\frac{1}{3}}$$

$$\beta = \frac{3}{2}\pi$$





## § 3.4 分离变量法

【pp. 91-92, 例3-8】：求此平面场的电位分布。

$\rho \rightarrow \infty$

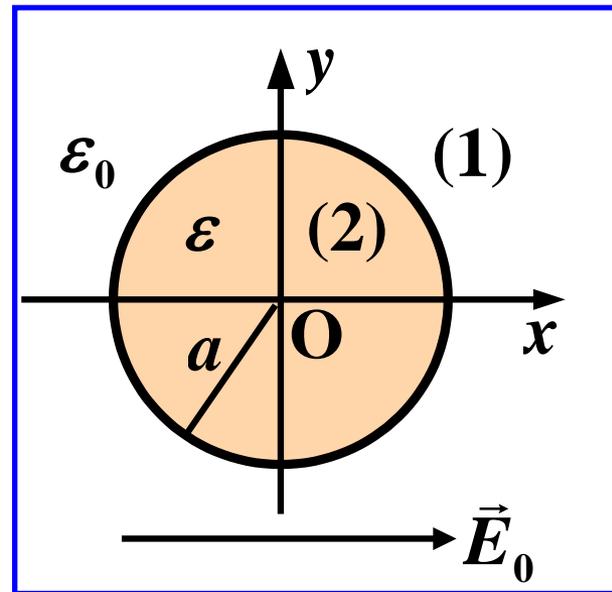
$$\vec{E} = E_0 \hat{x} + \frac{Q_{lb}}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$\varphi = C - E_0\rho \cos\theta - \frac{Q_{lb}}{2\pi\epsilon_0} \ln\rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$Q_{lb}$ ：单位长度极化电荷总量

可证： $Q_{lb} = 0$

☀ p. 91



$$G(\theta) = \begin{cases} \sin n\theta \rightarrow \text{解关于 } x \text{ 轴对称} \\ \cos n\theta, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

## § 3.4 分离变量法

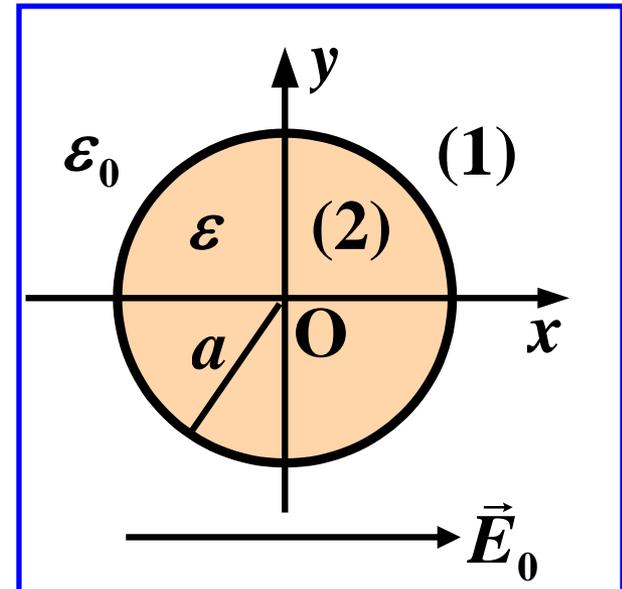
(1)区:

$$n = 0, R(\rho) = A_0 \ln \frac{\rho}{a} + B_0$$

$$n \neq 0, R(\rho) = A_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^n + B_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-n}$$

$$n > 1, A_n = 0; n = 1, A_1 = -E_0 a$$

$$\varphi_1 = B_0 - E_0 \rho \cos \theta + B_1 \frac{a}{\rho} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \cos n \theta \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-n}$$



## § 3.4 分离变量法

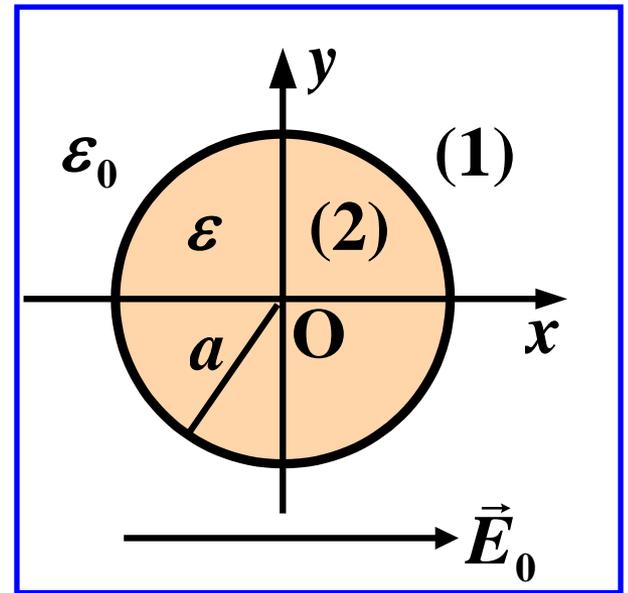
(2)区:

$$n = 0, R(\rho) = C_0 \ln \frac{\rho}{a} + D_0$$

$$n \neq 0, R(\rho) = C_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^n + D_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-n}$$

自然边界条件:  $\rho = 0$ ,  $\varphi$ 有限

$$\phi_2 = D_0 + C_1 \frac{\rho}{a} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cos n\theta \left(\frac{\rho}{a}\right)^n$$



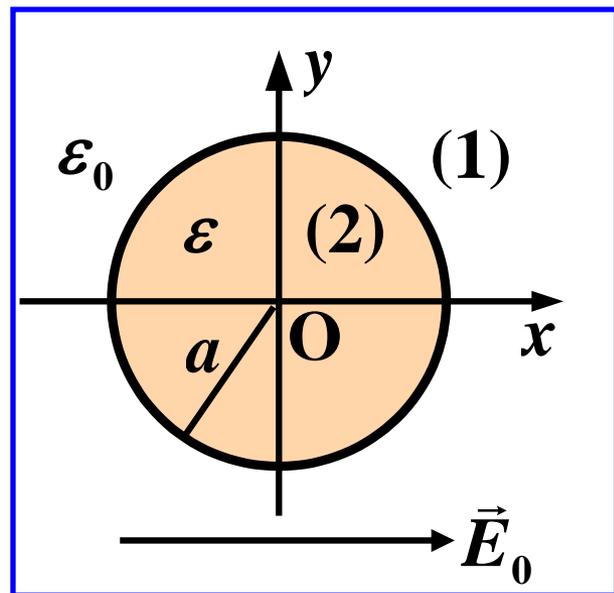
## § 3.4 分离变量法

(1)区和(2)区交界处:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = \varepsilon_r \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}$$

选电位零点:

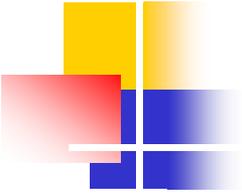
$$\rho = 0, \quad \varphi = 0$$



$$\varphi_1 = -E_0 \rho \cos \theta + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{a^2 E_0}{\rho} \cos \theta$$

$$\varphi_2 = -\frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1} \rho \cos \theta$$

p. 92, 图3-19



## § 3.4 分离变量法

### 三、球坐标系中的分离变量法

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Phi = R(r)H(\theta)G(\varphi)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta H} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 G}{d\varphi^2} = 0$$

设  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 、 $0 \leq \theta \leq \pi$  且  $\varphi$  和  $\theta$  方向均无边界

$\varphi$  和  $\theta$  方向均为振荡型解， $r$  方向为衰减型解。

## § 3.4 分离变量法

$$\text{令 } \frac{G''}{G} = C_\varphi = -m^2 \leq 0$$

$$G(\varphi) = \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{n(n+1)} + \underbrace{\frac{1}{\sin \theta H} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}_{-n(n+1)} = 0$$

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

—— 欧拉型方程

$$R(r) = \begin{cases} r^n \\ r^{-n-1} \end{cases}$$

## § 3.4 分离变量法

$$\text{令 } x = \cos \theta, \quad \frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] H = 0$$

—— 连带 Legendre 方程

### 1、轴对称问题:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad m=0$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + n(n+1)H = 0 \quad (\text{Legendre 方程})$$

自然边界条件:  $\theta = 0, \pi$  或  $x = \pm 1$ ,  $H$  有限

## § 3.4 分离变量法

当  $n$  取非整数时, Legendre 方程在  $-1 \leq x \leq 1$  区间不存在有界解。仅当  $n$  取整数时存在有界解, 且二个基本解中仅一个有界。

$$H \sim P_n(x) = P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, & P_n(-1) &= (-1)^n \\ P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x = \cos \theta \end{aligned}$$

正交性:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx$$

$$= \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1)$$

## § 3.4 分离变量法

2、一般情况： $m=0, 1, 2, \dots$

自然边界条件  $\rightarrow n=0, 1, 2, \dots$

$H \sim P_n^m(x)$  (第一类) 连带 Legendre 函数

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

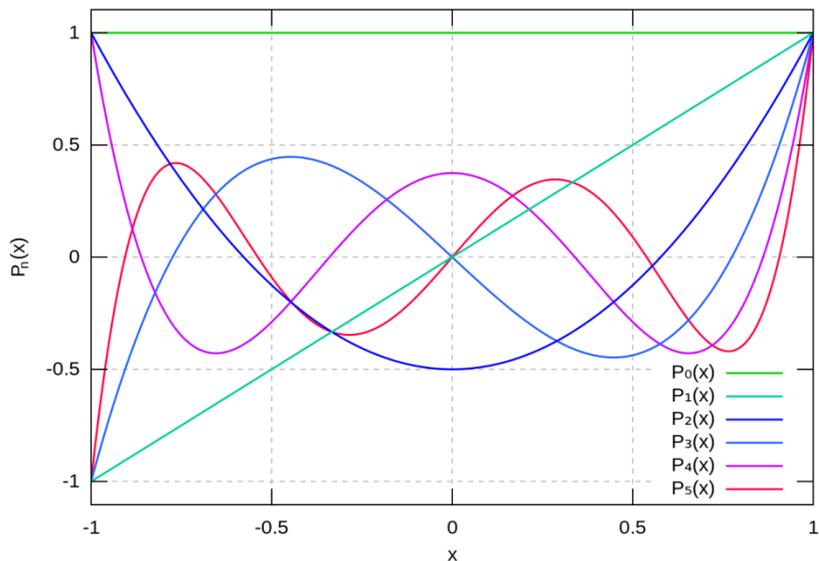
特别,  $P_n^0(x) = P_n(x)$

正交性:

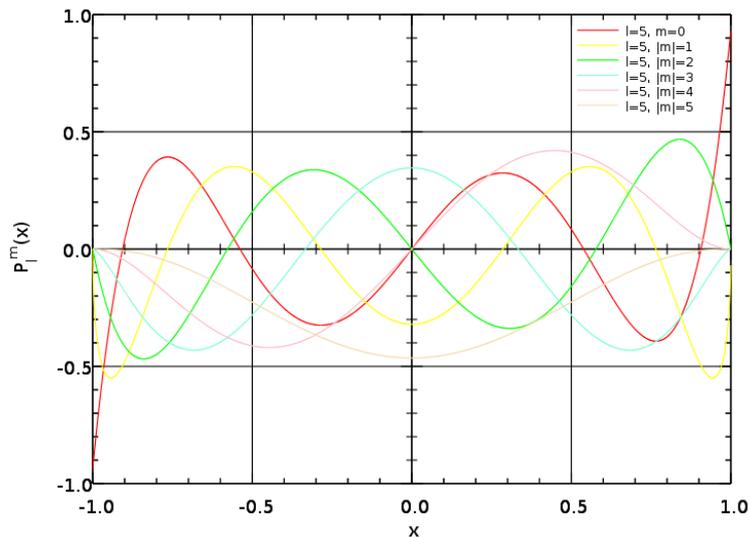
$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\ell^k(x) dx \\ &= \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_\ell^k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mk} \delta_{n\ell} \end{aligned}$$

# § 3.4 分离变量法

legendre polynomials



Associated Legendre Polynomials



假定： $\theta$ ， $\varphi$ 方向无边界

$r$ 方向	$\theta$ 方向	$\varphi$ 方向
$r^n$	$m = 0$ 时, $P_n(\cos\theta)$	$\sin m\varphi$
$r^{-n-1}$	$m \neq 0$ 时, $P_n^m(\cos\theta)$	$\cos m\varphi$
		$m = 0, 1, 2, \dots$

## § 3.4 分离变量法

【pp. 94-96, 例3-8】：求电位分布。

应给定导体表面总电量  $Q_f$ !

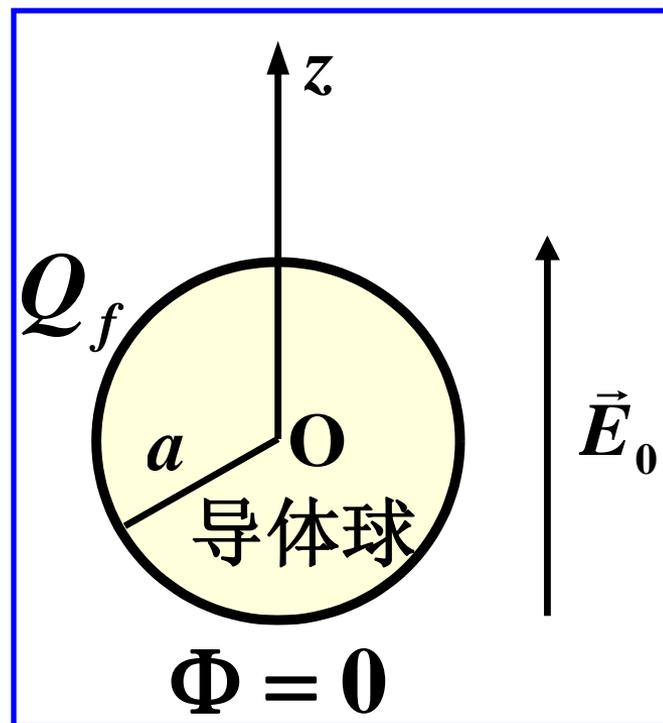
$r \rightarrow \infty$

★ p. 95

$$\vec{E} = E_0 \hat{z} + \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\Phi = C - E_0 r \cos\theta + \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n + B_n \left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \right] P_n(\cos\theta)$$



## § 3.4 分离变量法

由  $r = a, \Phi = 0$  得

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] P_n(\cos \theta)$$

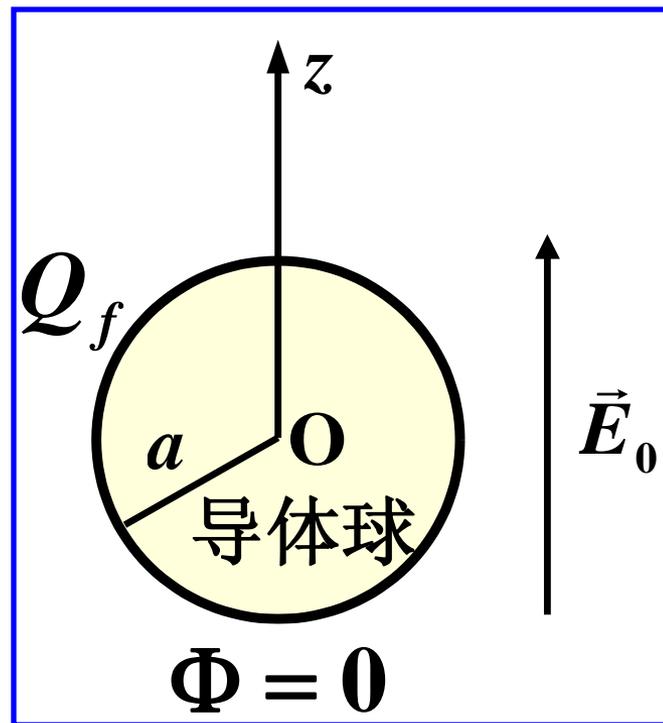
由无限远处边界条件:

$$n > 1, \quad A_n = 0$$

$$n = 1, \quad A_1 = -E_0 a$$

$$n = 0, \quad A_0 = -\frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\Phi = -\frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3 \cos \theta}{r^2}$$



## § 3.4 分离变量法

$$\Phi = -\frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 r \cos\theta + E_0 \frac{a^3 \cos\theta}{r^2}$$

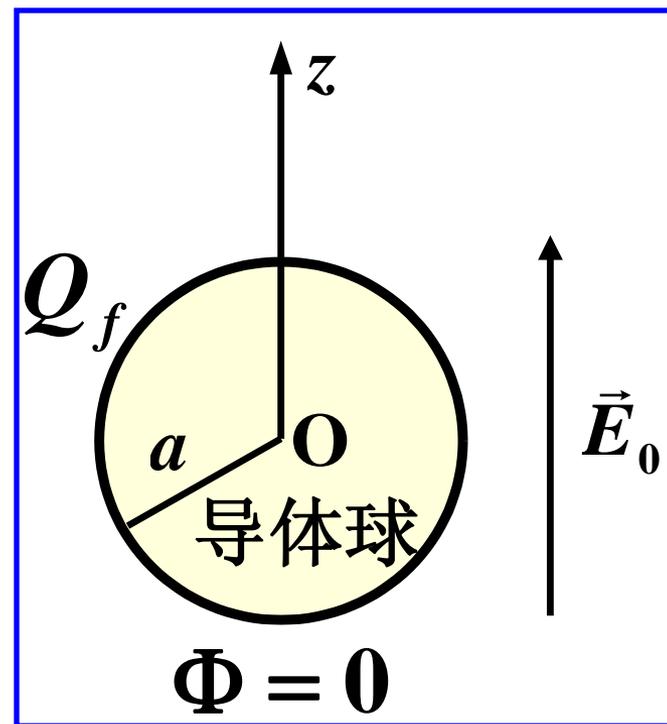
讨论:

$Q_f=0$ , p. 96, 图 3-21

电偶极子的电位:  $\Phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \hat{z}$$

➤ 此题亦可用镜像法求解。



均匀场可用二个无限大均匀平板电荷分布的场模拟。

$$E_0 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}, \quad \rho_s = \epsilon_0 E_0$$

$$dq = \frac{a}{d} \rho_s dS$$

总电量为零，单极项为零。

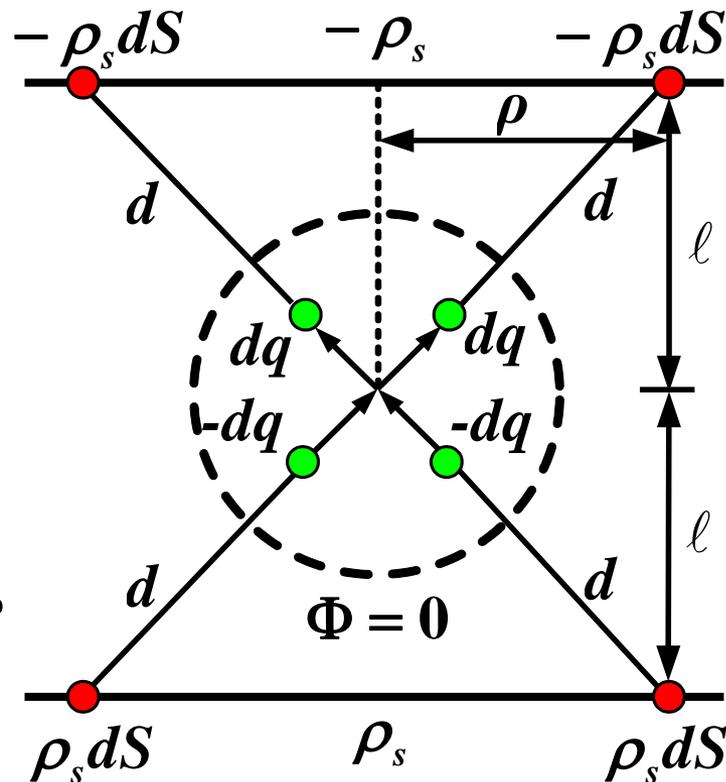
只需计算电偶极矩。高阶

极矩当平板移向无限远时可忽略。

$$dp = 4dq \frac{a^2}{d} \cdot \frac{\ell}{d} = 4 \frac{a^3}{d^3} \ell \rho_s dS$$

$$p = 4a^3 \ell \rho_s \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\rho d\theta d\rho}{(\ell^2 + \rho^2)^{3/2}} = 4\pi a^3 \rho_s = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0$$

$\ell \rightarrow \infty$ ,  $\vec{p} = p\hat{z}$ 。此时感应电荷总量为零。再在球面均匀放置  $Q_f$  即可。



分离变量法小结

## § 3.5 格林函数法

### 一、基本思想及定义

#### 基本思想:

先求点（线）电荷在齐次边界条件下的电位，然后再求任意电荷分布、任意非齐次边界条件下的电位。



定义: 
$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \vec{r}, \vec{r}' \in V \\ \text{齐次边界条件 (S上)} \end{cases}$$
称 $G(\vec{r}, \vec{r}')$ 为格林函数



#### 物理意义:

$G / \varepsilon$ 代表单位点（线）电荷在给定齐次边界条件下产生的电位。

例：无限大空间，没有介质

例：pp. 104-105

$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ G|_{\infty} \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\frac{G}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \longrightarrow G = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

例：半无限大空间，没有介质

$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), z, z' > 0 \\ G|_{\infty} \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0, \quad G|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{G}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right) \longrightarrow G = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$R^* = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2} = |\vec{r} - \vec{r}' + 2z'\hat{z}|$$

① 若  $G$  满足  $G|_S = 0$

则称  $G=G_1$  为第一类边值问题的格林函数。

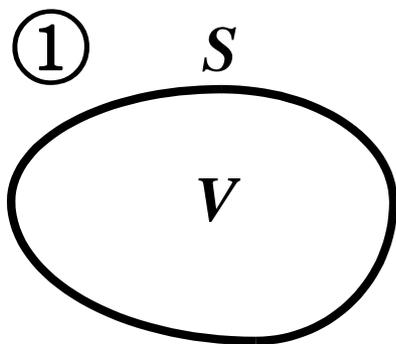
② 若  $G$  满足  $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$

则称  $G=G_2$  为第二类边值问题的格林函数。

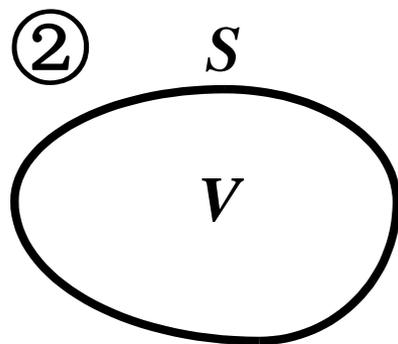
③ 若  $G$  部分满足  $G|_S = 0$ ，部分满足  $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$



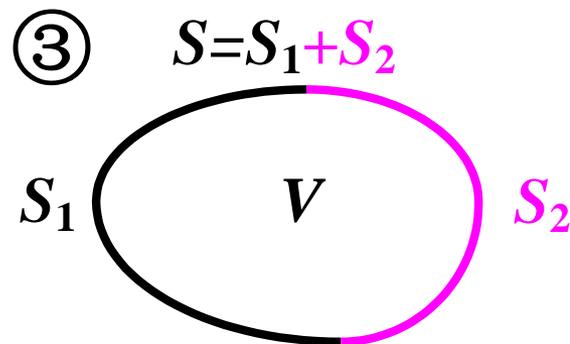
则称  $G=G_3$  为第三类边值问题的格林函数。



$$G|_S = 0$$



$$\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$



$$G|_{S_1} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial n}|_{S_2} = 0$$

性质:  $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$

即互易性 (无介质或介质线性各向同性)

## 二、格林函数法解边值问题

任意电荷分布, 任意非齐次边界条件。

第二标量格林定理:

$$\int_V [G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 \varphi(\vec{r}') - \varphi(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}')] dV' \quad \text{①}$$
$$= \oint_S [G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}] dS'$$

$$\vec{r} \in V$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') \frac{G(\vec{r}, \vec{r}')}{\epsilon} dV'$$

物理意义:

$$+ \oint_S \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') \right\} dS'$$

## § 3.5 格林函数法

① 已知  $\varphi|_S$ ,  $G=G_1$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') \frac{G_1(\vec{r}, \vec{r}')}{\varepsilon} dV' - \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_1(\vec{r}, \vec{r}') dS'$$

② 已知  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$ ,  $G=G_2$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') \frac{G_2(\vec{r}, \vec{r}')}{\varepsilon} dV' + \oint_S G_2(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} dS'$$

③ 已知  $\varphi|_S$  或  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$ ,  $G=G_3$

# § 3.5 格林函数法

## 三、格林函数法的求解方法

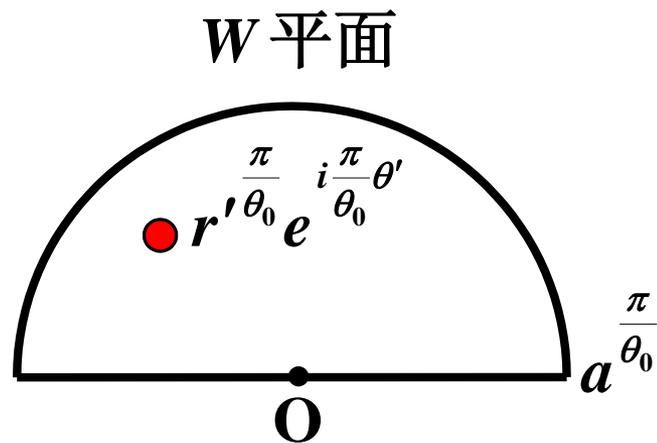
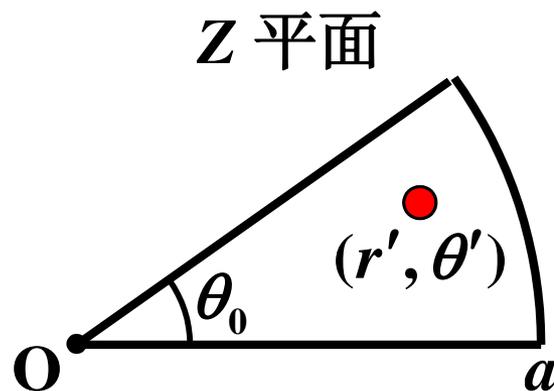
- 镜像法
- 保角变换法+镜像法
- 分离变量法

例：求  $G=G_1$ 。

$$w = z^\alpha = z^{\frac{\pi}{\theta_0}}$$

主值：  $w = e^{\frac{\pi}{\theta_0} \ln z} = e^{\frac{\pi}{\theta_0} (\ln|z| + i \arg z)}$

$$|w| = |z|^{\frac{\pi}{\theta_0}}, \quad \arg w = \frac{\pi}{\theta_0} \arg z$$



在  $W$  平面用镜像法求解后再变换回到  $Z$  平面。

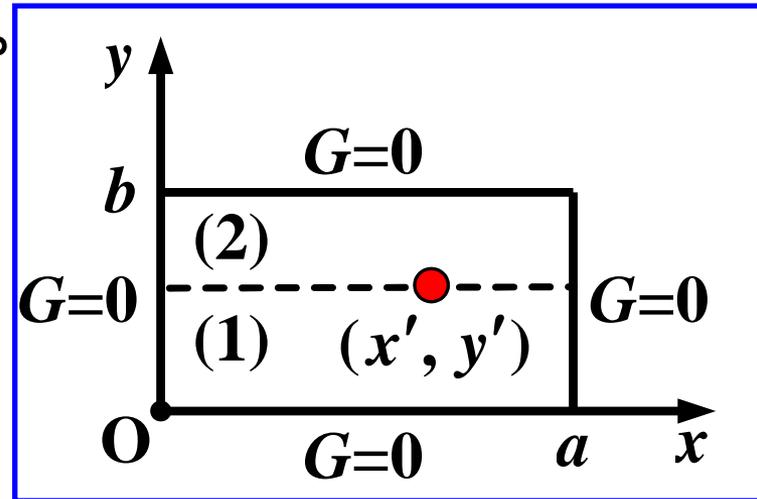
## § 3.5 格林函数法

【pp. 105-106, 例3-12】：求 $G_1$ 。

$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ G|_S = 0 \end{cases}$$

分为二个区，在每个区均满足 Laplace 方程，可分离变量。

$x$  方向齐次， $y$  方向非齐次。



$$G^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y$$

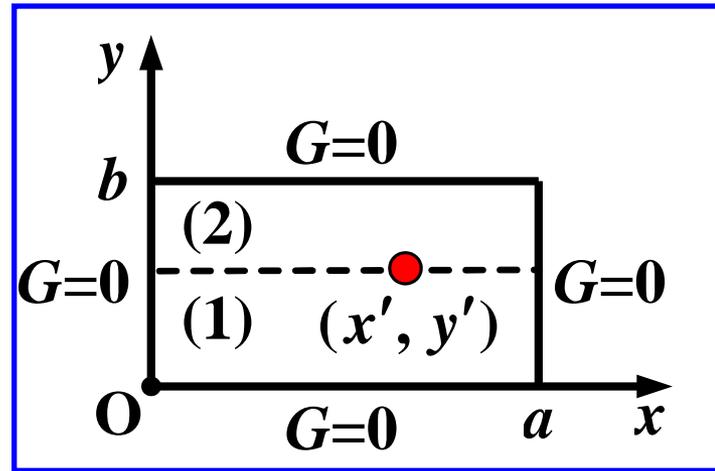
$$G^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y)$$

# § 3.5 格林函数法

$$\varphi = G / \varepsilon_0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0, \quad \rho_{sf} = \delta(x - x')$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_{sf} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} G^{(1)} = G^{(2)} \\ \frac{\partial G^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial G^{(2)}}{\partial y} = \delta(x - x') \end{cases}$$

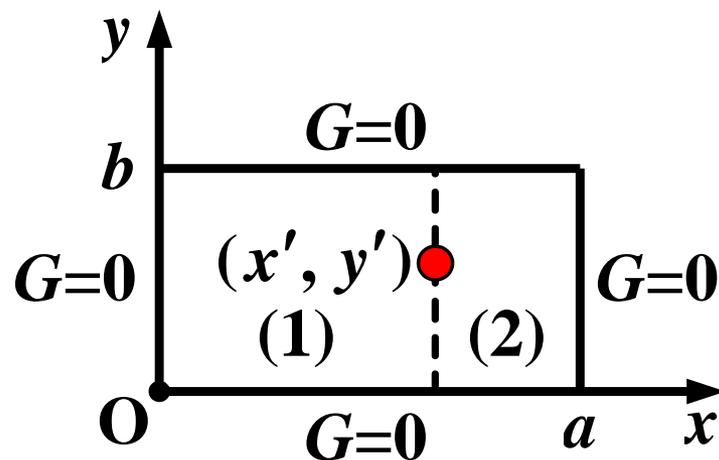
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} x'}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b}$$



$$\begin{cases} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y'), & y < y' \\ \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} (b - y) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y', & y > y' \end{cases}$$

## § 3.5 格林函数法

另一种分区方法。 $y$ 方向齐次， $x$ 方向非齐次。



$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{b} y'}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a}$$



$$\cdot \begin{cases} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a - x'), & x < x' \\ \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a - x) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x', & x > x' \end{cases}$$

# § 3.5 格林函数法

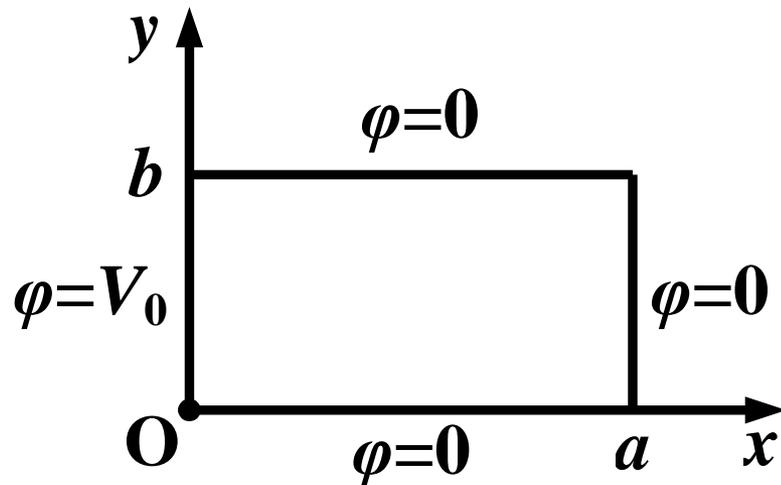
例：已知  $G_1$ ，求电位分布。

$$\varphi = -\oint_S \varphi \frac{\partial G_1}{\partial n'} dS'$$

$$\varphi = V_0 \int_0^b \frac{\partial G_1}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy'$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{b} y'}{b \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a-x)$$

$$\varphi = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{4V_0 \sin \frac{n\pi}{b} y \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a-x)}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a}$$



备注：仅为例题，直接用分离变量法求解更方便。

# 本章总结

## 总结

## 电磁场分析方法简要评述

按求解方式及所得结果的形式划分：

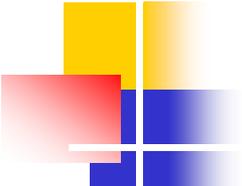
电磁场分析方法 { 解析方法  
数值方法

### 解析方法优点：

- 物理概念比较清晰，比较容易建立物理图像；
- 因所得结果为数学表达式，可求物理量在任意点的值，容易研究其变化规律。

### 解析方法缺点：

- 能解决的实际问题较少；
- 需要的数学知识相对较多。



# 本章总结

## 数值方法

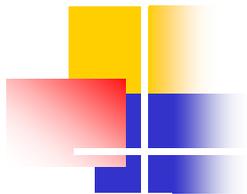
计算电磁学(Computational Electromagnetics, CEM)  
微分方程类，积分方程类。

### 优点:

- 能解决大量的实际问题;
- 需要的数学知识相对较少。

### 缺点:

- 物理概念、图像相对来说不那么清晰;
- 不容易研究物理量的变化规律，特别是几何、物理参数较多时，物理量的值也需反复计算。



# 本章总结

解析方法与数值方法的关系

计算电磁学(CEM)发展历史与现状

全波数值方法

高频方法